



Universidad

e Federal do Paraná  
Setor de Tecnologia  
Departamento de Engenharia Elétrica - DELT  
Disciplina: TE – 051  
Professor: [Marlio J. do C. Bonfim](#), Dr.

## CIRCUITOS NÃO LINEARES

TE 051

## **Introdução**

A disciplina TE051 – Circuitos Não Lineares tem por objetivo fornecer conhecimentos básicos sobre circuitos eletrônicos com características não lineares, realização de operações matemáticas (multiplicação, divisão, exponenciação, logaritmo), osciladores não senoidais, retificadores e conversores, circuitos a capacitor chaveado.

Os procedimentos didáticos adotados são baseados em aulas expositivas, resolução de exercícios, simulação de circuitos e aulas práticas de laboratório.

O aproveitamento escolar é realizado através de avaliações escritas, listas de exercícios, relatórios de laboratório e projeto prático (optativo).

Esta apostila foi elaborada com a colaboração dos alunos: Anderson Cleber Rabelo da Silva, Marianna Helena de Souza, Rafael Andrei Freitas Irala e Signie Laureano França Santos.

Esta é uma segunda versão revisada, no entanto pode conter erros que serão corrigidos no decorrer das aulas.

## Sumário

### Capítulo 1 - Circuitos operadores matemáticos

|       |  |
|-------|--|
| 1.1.  | Conceitos gerais .....                                 |
| 1.1.1 | Revisão Amplificadores Operacionais .....              |
| 1.2   | Operadores lineares envolvendo amplitude e tempo ..... |
| 1.2.1 | <i>Amplificador Inversor</i> .....                     |
| 1.2.2 | <i>Amplificador Não-Inversor</i> .....                 |
| 1.3   | Circuitos Operadores Matemáticos .....                 |
| 1.3.1 | Somador Inversor .....                                 |
| 1.3.2 | Subtrator .....  |
| 1.3.3 | Integrador temporal .....                              |
| 1.3.4 | Diferenciador temporal .....                           |
| 1.4   | Circuitos Operadores Matemáticos não lineares .....    |
| 1.4.1 | Operador Logaritmo .....                               |
| 1.4.2 | Operador Exponencial .....                             |
| 1.4.3 | Operador Multiplicação .....                           |
| 1.4.4 | Operador Divisão .....                                 |
| 1.4.5 | Operador Radiciação .....                              |
| 1.5   | Operadores multifunção .....                           |

### Capítulo 2 - Circuitos retificadores e conversores

|      |                                     |
|------|-------------------------------------|
| 2.1. | Retificadores de precisão .....     |
| 2.2. | Detetor de pico e granpeador .....  |
| 2.3. | Conversores frequência-tensão ..... |
| 2.4. | Conversores ângulo-tensão .....     |

### Capítulo 3 - Osciladores não senoidais e geradores de pulso

|      |  |
|------|--|
| 3.1. | Multivibradores monoestáveis, biestáveis, astáveis ..... |
| 3.2. | Geradores de onda quadrada e retangular .....            |
| 3.3. | Geradores de ondas triangular e dente de serra .....     |
| 3.4. | Geradores de função .....                                |

### Capítulo 4 - Circuitos a capacitor chaveado

|      |   |
|------|---|
| 4.1. | Análise do capacitor em regime chaveado ..... |
| 4.2. | Multiplicadores de tensão, inversores .....   |
| 4.3. | Filtros a capacitor chaveado.....             |

### Anexos:

- Exercícios propostos em Sala de aula
- 1ª Lista de Exercícios
- 2ª Lista de Exercícios

### Bibliografia

## 1. Circuitos operadores matemáticos

Circuitos operadores matemáticos realizam eletricamente operações matemáticas em sinais de entrada (tensões ou correntes), utilizando fontes de tensão, amplificadores operacionais e componentes passivos (resistores, capacitores, diodos, etc.). A seguir serão revisados conceitos básicos de Amplificadores Operacionais (AMPOP) e em seguida serão analisados circuitos operadores.

### 1.1. Conceitos gerais

#### 1.1.1 Revisão Amplificadores Operacionais

O amplificador operacional (AMPOP ou OPAMP) é um amplificador diferencial integrado de alto ganho, com resposta em frequência desde DC até centenas de MHz dependendo do modelo. A adição de elementos externos (resistores, capacitores, diodos) permite ajustar a função de transferência de saída em relação à entrada.

Os AMPOP's são representados simbolicamente por um triângulo com duas entradas e uma saída. Os terminais de alimentação podem ser omitidos nesta representação por simplicidade. Uma das entradas é *inversora* (-) e a outra *não-inversora* (+). O sinal na *saída* (vértice do triângulo),  $V_{out}$ , é igual a um ganho de tensão  $A$  multiplicado pela diferença entre as tensões nas entradas inversora e não inversora,  $V_{out} = A(V^+ - V^-)$ . Idealmente, o ganho  $A$  seria infinito, porém na prática é da ordem de  $10^5$  para baixas frequências. AMPOP são comercializados sob a forma de 1, 2 ou 4 amplificadores em um único encapsulamento.

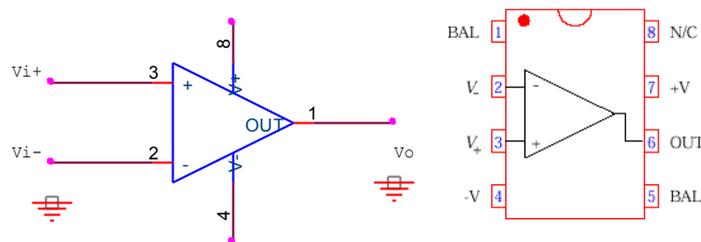


Figura 01: Amplificador Operacional: simbologia e encapsulamento típico

#### ➤ Características do AMPOP Ideal:

- i. Resistência de Entrada infinita ( $R_i = \infty$ );
- ii. Resistência de Saída zero ( $R_o = 0$ );
- iii. Ganho de Tensão Diferencial infinito ( $A_d = \infty$ );

$$A_d = \frac{\Delta V_o}{\Delta (V_i^+ - V_i^-)} = \infty$$

- iv. Largura de Faixa ( $BW = \infty$ );
- v.  $V_o = 0$  quando  $V_{in} = 0$ ;
- vi. Características independentes da temperatura.

➤ **Principais Limitações Práticas do AMPOP:**

- i. **Máxima excursão de saída:** A tensão de saída  $V_o$  é limitada pelas tensões de alimentação e pelas perdas internas no circuito do AMPOP.

Tipicamente:  $V_{o\max} = V^+ - 2V$

$$V_{o\min} = V^- + 2V$$

- ii. **Ganho de tensão diferencial em função da frequência:** Devido a limitações no circuito interno do AMPOP o ganho diferencial é dependente da frequência e limita a operação com sinais alternados.

$$BW = A_d f = cte$$

Onde:  $BW$  (frequência de transição ou produto ganho x banda)

Obs: esta expressão é válida para  $f > f_c$  (frequência de corte), que na prática situa-se na faixa de 10 a  $10^3$  Hz, dependendo do AMPOP.

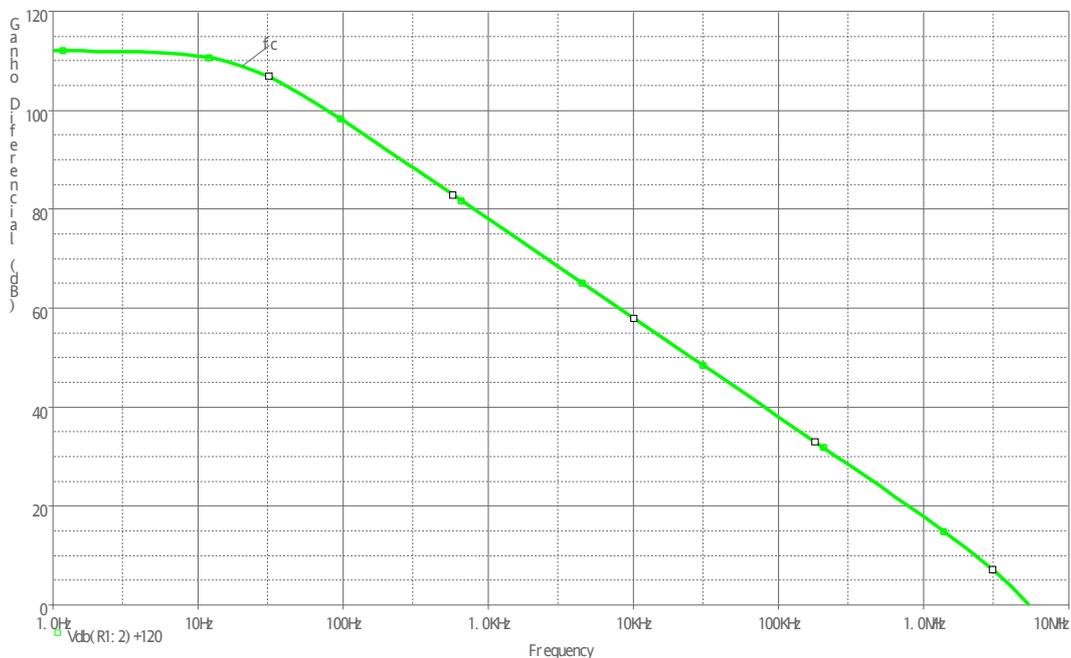


Figura 02: Ganho de tensão diferencial em função da frequência.

- iii. **Corrente Máxima de Saída:** O circuito interno de saída é limitado em corrente de modo a proteger o AMPOP e evitar danos por excesso de potência. Essa corrente limita a mínima resistência que pode ser usada como carga de saída.

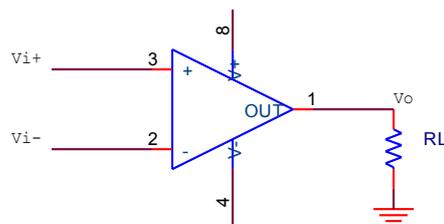


Figura 03: AMPOP com carga na saída

**Exemplo 01):** Considere um tensão de alimentação do AMPOP de  $V^+ = +12V$  e  $V^- = -12V$  com uma tensão máxima de saída de  $-10 < V_o < +10V$ . Considerando  $I_{omáx} = 20mA$ , qual a mínima resistência de carga  $RL_{min}$  ?

Solução:

$$RL_{min} = \frac{V_{omáx}}{I_{omáx}} = \frac{10}{20mA} = 0,5 \cdot 10^3 = 500\Omega$$

Portanto usar resistores menores que  $500\Omega$  causa ceifamento na tensão de saída.

DICA: sempre usar resistores acima de  $1k\Omega$  na saída.

## 1.2 Operadores lineares envolvendo amplitude e tempo.

**1.2.1 Amplificador Inversor:** A saída possui fase invertida em relação a entrada.

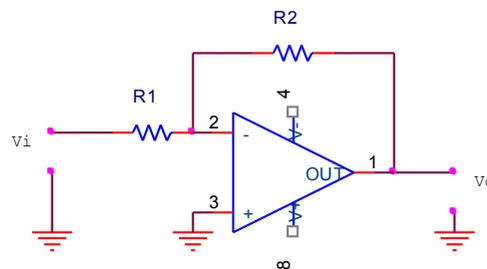


Figura 04: Circuito Amplificador Inversor

Ganho de tensão:

$$v_o = Av_i$$

$$I^+ = I^- \cong 0$$

$$A_d = \infty$$

$$V_i^+ = 0 = V_i^- = terra\_virtual$$

$$I_i = \frac{v_i}{R_1} \Rightarrow I_o = \frac{-v_o}{R_2} \Rightarrow I_i = I_o \therefore v_o = \frac{-R_2}{R_1} v_i \therefore A = \frac{-R_2}{R_1}$$

Observação: Para que o circuito opere na região linear é necessário observar as condições de máxima excursão de tensão e máxima corrente de saída.

Freqüência de corte: é a freqüência na qual o ganho de tensão cai para  $\frac{1}{\sqrt{2}}$

do seu valor máximo (baixas freqüências).  $A_{FC} = \frac{-R_2}{\sqrt{2}R_1} \therefore \frac{A}{\sqrt{2}}$

$f_T$  = freqüência de transição quando o ganho do AMPOP é igual a 1.

Potencia na freqüência de corte é:  $P_{FC} = \frac{P}{2}$  A freqüência de corte do

amplificador realimentado é:  $f_{CR} = f_T \frac{R_1}{R_2} = \frac{f_T}{A}$

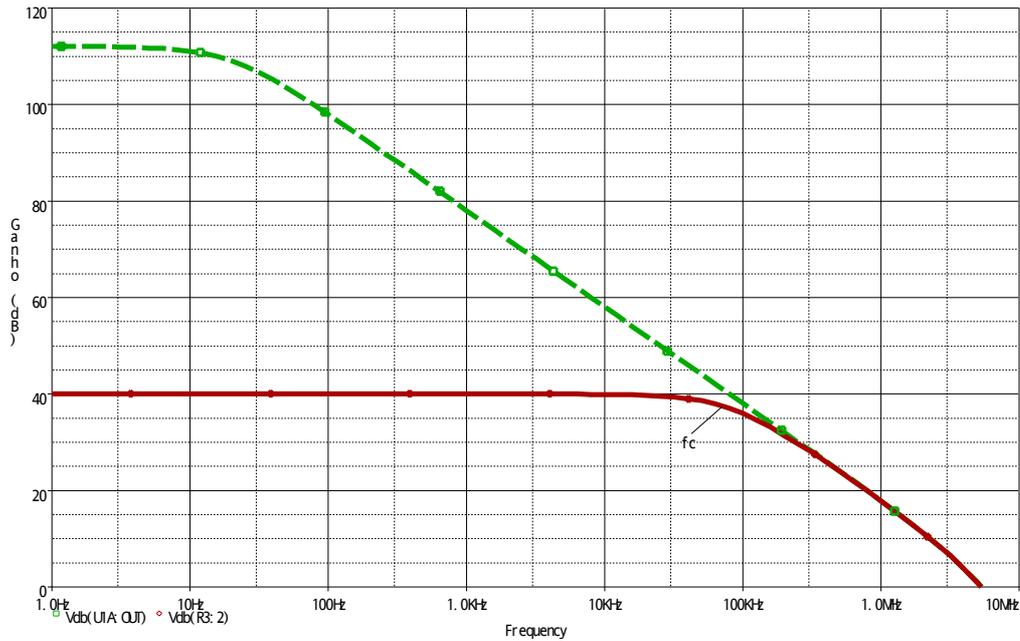


Figura 05: gráfico da resposta em frequência do amplificador realimentado

### 1.2.2 Amplificador Não-Inversor: A saída possui a mesma fase da entrada.

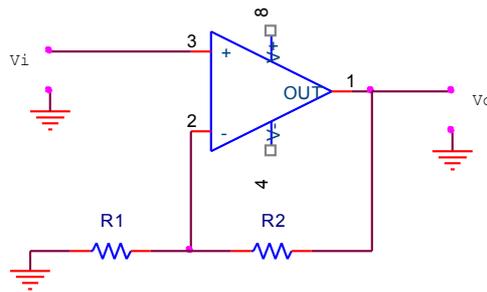


Figura 06: Circuito Amplificador Não Inversor

$$I^+ = I^- \cong 0$$

$$A_d = \infty \Rightarrow V_i^+ = V_i^- = v_i$$

$$I_1 = I_2$$

$$I_1 = \frac{v_i}{R_1}$$

$$I_2 = \frac{v_o - v_i}{R_2} \therefore \frac{v_i}{R_1} = \frac{v_o - v_i}{R_2} \therefore v_o = v_i \frac{R_2}{R_1} + v_i$$

$$v_o = v_i \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right) \therefore A = \frac{R_2}{R_1} + 1$$

A frequência de corte do amplificador realimentado não inversor é:

$$f_{CR} = f_T \left( \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) = \frac{f_T}{A}$$

### 1.3 Circuitos Operadores Matemáticos

São circuitos que fornecem uma tensão de saída que é o resultado de uma operação matemática linear ou não linear aplicada a uma ou mais tensões de entrada. Com esses circuitos podemos implementar equações de soma, subtração, multiplicação, divisão, integração, diferenciação, etc.

1.3.1 **Somador Inversor:** A saída representa a soma invertida de várias entradas.

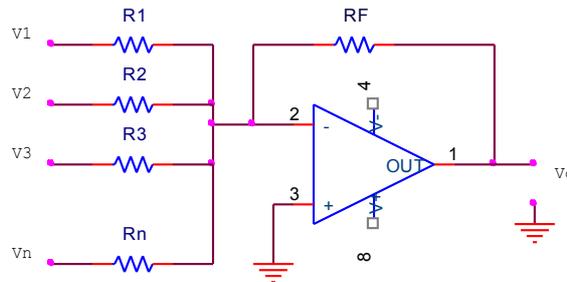


Figura 07: Circuito Somador Inversor

$$I_o = I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_n$$
$$I_o = \frac{-v_o}{R_F} = \frac{v_1}{R_1} + \frac{v_2}{R_2} + \frac{v_3}{R_3} + \dots + \frac{v_n}{R_n}$$
$$v_o = -R_F \left( \frac{v_1}{R_1} + \frac{v_2}{R_2} + \frac{v_3}{R_3} + \dots + \frac{v_n}{R_n} \right)$$

Obs.: As mesmas limitações de tensão, corrente de saída e freqüência de corte para o amplificador inversor se aplicam ao somador.

1.3.2 **Subtrator:** A saída representa a diferença entre duas entradas.

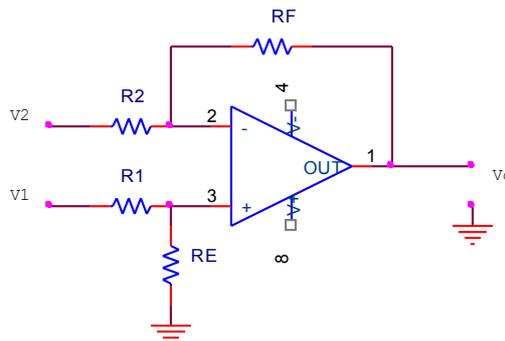


Figura 08: Circuito Subtrator

Para encontrarmos a tensão de saída em função das tensões de entrada deveremos fazer análise por superposição. Dividiremos o circuito subtrator em outros dois circuitos que estão demonstrados na figura 10.

Solução:

Fazendo análise por superposição temos:

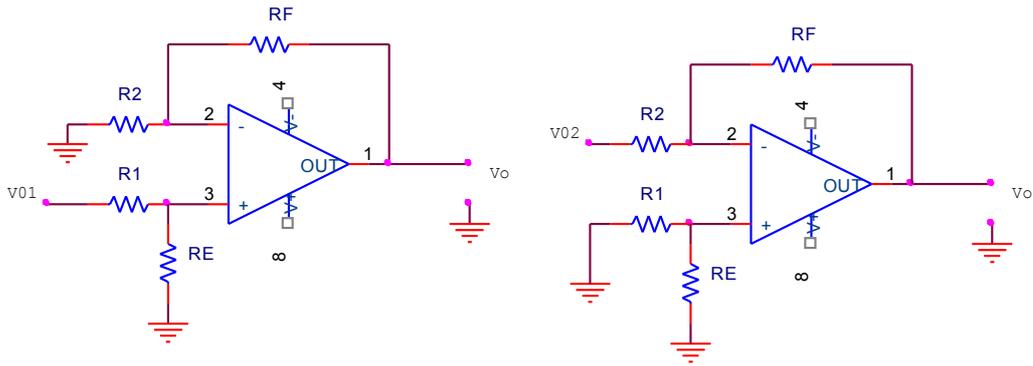


Figura 09: Circuito Subtrator com  $V_2 = 0$  e para  $V_1 = 0$ .

Para  $V_2 = 0$  temos:

$$V_i^+ = v_i \frac{R_E}{R_1 + R_E}$$

$$v_{01} = \left( \frac{R_F}{R_2} + 1 \right) V_i^+ = \left( \frac{R_F}{R_2} + 1 \right) v_{i1} \frac{R_E}{(R_1 + R_2)}$$

Para  $V_1 = 0$  temos:

$V_i^+ = 0$  similar ao AMPOP inversor, portanto:

$$v_{02} = -\frac{R_F}{R_2} v_{i2}$$

Fazendo a soma das duas tensões obtemos:

$$v_0 = v_{01} + v_{02}$$

$$v_0 = v_{i1} \frac{R_E(R_F + R_2)}{R_2(R_1 + R_2)} - \frac{R_F}{R_2} v_{i2}$$

$$v_0 = v_{i1} \left[ \frac{R_F R_E + R_2 R_E}{R_2(R_1 + R_2)} \right] - \frac{R_F}{R_2} v_{i2}$$

$$v_0 = v_{01} A_1 - v_{02} A_2$$

$$\text{Para } A_1 = A_2 \Rightarrow \frac{R_F}{R_2} = \left( \frac{R_2 + R_F}{R_2} \right) \left( \frac{R_E}{R_1 + R_2} \right) \therefore \frac{R_F}{R_2} = \frac{R_E}{R_1}$$

$$\text{Para } A_1 = A_2 = 1 \Rightarrow R_1 = R_2 = R_F = R_E$$

**1.3.3 Integrador temporal:** Realiza a operação de integral temporal do sinal de entrada.

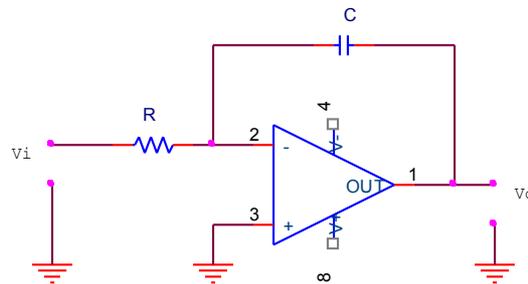


Figura 10: Circuito Integrador Temporal

$$V_i^+ = V_i^- = terra\_virtual = 0$$

$$I_i = I_C$$

$$I_i = \frac{v_i}{R}$$

$$I_C = C \frac{dv_C}{dt} \left. \vphantom{I_C} \right\} \frac{v_i}{R} = C \left( \frac{-dv_0}{dt} \right)$$

$$v_C = -v_0$$

$$dv_0 = \frac{v_i}{RC} dt$$

$$v_0 = \int \frac{-v_i}{RC} dt \therefore \left[ v_0 = \frac{-1}{RC} \int v_i dt \right]$$

Ganho de tensão para entrada senoidal:

$$|A| = \frac{|X_C|}{R} = \frac{1}{2\pi fC} = \frac{1}{RC2\pi f} \therefore |A| = \frac{1}{2\pi f \cdot RC}$$

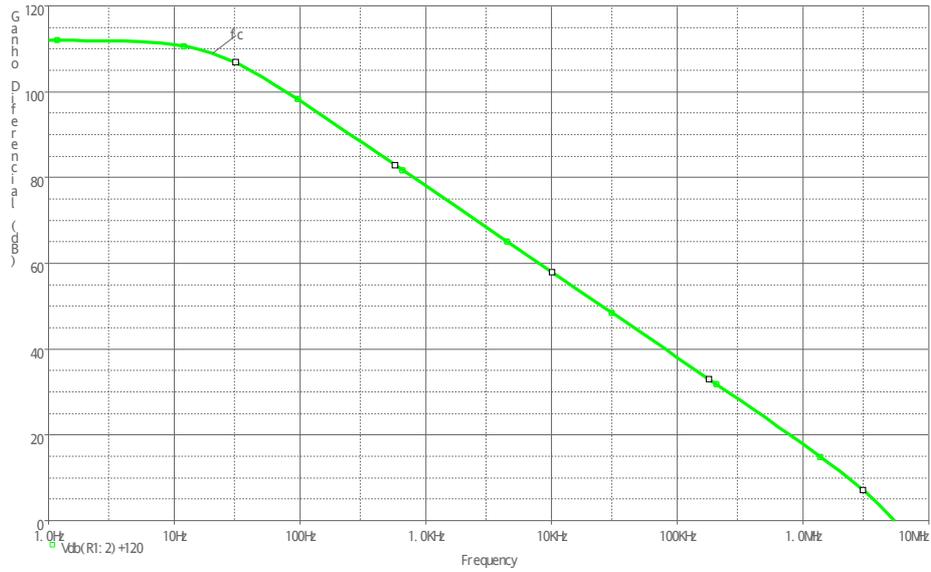
A nova  $f_T$  é dada por:

$$|X_C| = \frac{1}{2\pi fC}$$

para

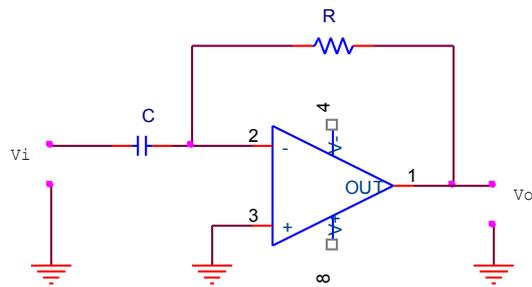
$$R = \frac{1}{2\pi f_T C} \quad A = 1 \text{ temos: } f_T = \frac{1}{2\pi RC}$$

Obs.: O integrador opera corretamente dentro de toda a faixa de frequência do AMPOP até  $f_T$ .



**Figura 11: Resposta em Freqüência do Integrador Temporal**

**1.3.4 Diferenciador temporal:** Realiza a operação de derivada temporal do sinal de entrada.



**Figura 12: Circuito Diferenciador Temporal**

$$V_i^- = V_i^+ = 0 \rightarrow \text{terra\_virtual}$$

$$I_C = I_R$$

$$I_R = \frac{V_R}{R} = \frac{-v_0}{R}$$

$$I_C = C \frac{dv_C}{dt} = C \frac{dv_i}{dt} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} I_C = I_R$$

$$v_C = v_i$$

$$\frac{-v_0}{R} = C \frac{dv_i}{dt} \therefore \left[ v_0 = -RC \frac{dv_i}{dt} \right]$$

Ganho de tensão para entrada senoidal:

$$|A| = \frac{R}{|X_C|} = \frac{R}{\frac{1}{2\pi fC}} = RC2\pi f \therefore |A| = 2\pi f \cdot RC$$

Para  $f'_C$  junto do diferenciador temos  $A' = \frac{f}{f'_T}$  com um ganho do AMPOP de  $A_d = \frac{f'_T}{f}$ . Portanto Obtemos:

$$f'_C \Rightarrow A_d = A \therefore \frac{f'_T}{f'_C} = \frac{f'_C}{f'_T} \therefore f'_C = \sqrt{f'_T f'_T}$$

$$|A| = 1 \text{ temos: } f'_T = \frac{1}{2\pi RC}$$

Obs.: O diferenciador só opera corretamente para freqüências inferiores a  $f'_T$ . Após ele fica limitado à resposta natural do AMPOP que tem característica de integrador.

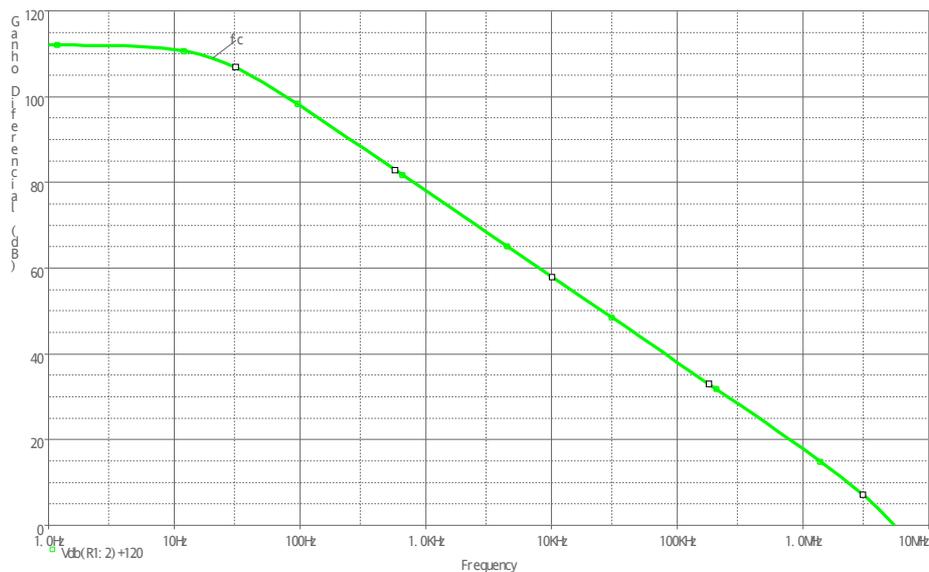


Figura 13 Resposta em Freqüência do Circuito Diferenciador Temporal