

Circuitos Operadores Matemáticos não lineares

São circuitos que utilizam elementos não lineares para realizar operações de multiplicação, divisão, logaritmo, exponencial, etc. Esses circuitos utilizam geralmente um elemento não linear baseado numa junção semicondutora (diodo ou transistor bipolar).

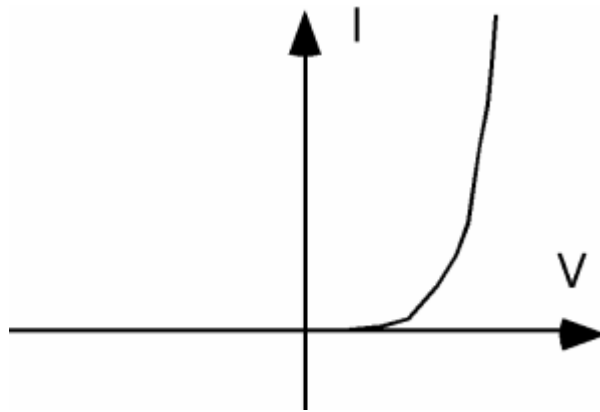


Figura 14: Curva característica de $I_D \times V_D$ de um diodo de junção semicondutora PN

Modelo matemático de $I_D = f(V_D)$

Polarização direta $V_D \geq 0$

$$I_D = I_S \left[e^{\left(\frac{qV_D}{nkT} \right)} - 1 \right]$$
$$V_T = \frac{kT}{q}$$

Modelo matemático de $I_S = f(T)$

$$I_S(T) = I_S(T_0) \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{3}{n}} e^{\left[\frac{E_g(qT_0)}{nk(T-T_0)} \right]}$$

Onde:

I_S : corrente de saturação reversa (depende de: geometria, temperatura e semicondutor utilizado);

V_D : tensão de polarização direta

q : carga do elétron ($1,6 \cdot 10^{-19} \text{C}$)

k : constante de Boltzmann ($1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$)

T : temperatura absoluta (Kelvin)

E_g : Energia de “bandgap” do semicondutor (1,12 eV para Si)

n : coeficiente de emissão de portadores que dependem do tipo de junção e do semicondutor. Usualmente encontra-se entre $1 < n < 2$.

Obs.: Tipicamente I_S dobra para cada 10 graus de aumento da temperatura.

Operador Logaritmo

Realiza a operação de logaritmo neperiano ($\ln$) de uma tensão de entrada v_i .

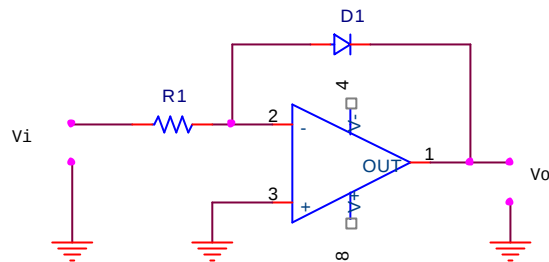


Figura 15: Circuito Amplificador Logaritmo

$$I_d = I_i$$

$$V^+ = V^- = 0$$

$$I_i = \frac{v_i}{R} \quad \text{Considerando: } e^{\frac{V_d}{nV_T}} \gg 1 \Rightarrow I_d = I_S e^{\frac{V_d}{nV_T}}$$

$$V_d = -v_o$$

$$\ln\left(\frac{I_d}{I_S}\right) = \ln e^{\frac{V_d}{nV_T}} = \frac{V_d}{nV_T} \therefore V_d = nV_T \ln\left(\frac{I_d}{I_S}\right)$$

$$v_o = -nV_T \ln\left(\frac{v_i}{RI_S}\right)$$

Onde: n e R são constantes, porém V_T e I_S variam com a temperatura gerando um erro na operação. Para eliminar esse erro é utilizado um circuito de compensação de temperatura

➤ Compensação de temperatura

Para que o Amplificador Logarítmico funcione em diferentes temperaturas é necessário um circuito que compense variações de V_T e I_S .

a) Compensação de I_S : usa-se um segundo diodo idêntico polarizado diretamente com uma corrente constante e conectado à saída do circuito de modo a subtrair a tensão do diodo D1.

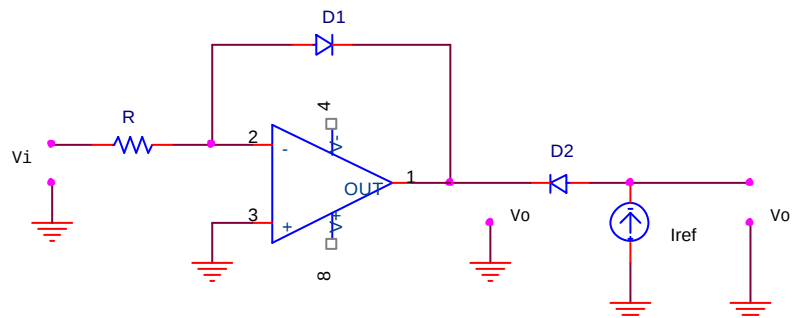


Figura 16: Circuito de Compensação de temperatura do Amplificador Logaritmo

Consideramos D1 identico a D2 $\Rightarrow I_{S'} = I_S$

$$v_o = -nV_T \ln\left(\frac{v_i}{RI_S}\right)$$

$$I_{d2} = I_{ref}$$

$$V_{d2} = nV_T \ln\left(\frac{I_{ref}}{I_S}\right)$$

$$v_{o'} = V_{d2} + v_o = nV_T \left[\ln\left(\frac{I_{ref}}{I_S}\right) - \ln\left(\frac{v_i}{RI_S}\right) \right]$$

$$v_{o'} = nV_T \left[\ln\left(\frac{\frac{I_{ref}}{I_S}}{\frac{v_i}{RI_S}}\right) \right] = nV_T \left(\ln \frac{I_{ref} \cdot I_S \cdot R}{v_i \cdot I_S} \right)$$

Portanto:

$$v_{o'} = nV_T \ln\left(\frac{I_{ref} \cdot R}{v_i}\right) \text{ ou } v_{o'} = -nV_T \ln\left(\frac{v_i}{I_{ref} \cdot R}\right)$$

b) Compensação de V_T : utiliza-se um estágio de amplificação com ganho variável com a temperatura, através de um resistor (RT) cuja resistência é função da temperatura.

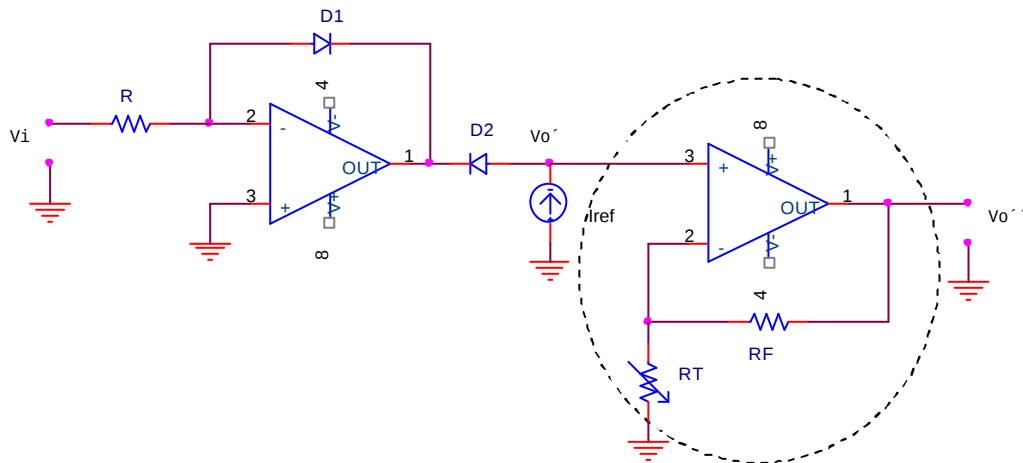


Figura 17: Circuito de Compensação de V_T do Amplificador Logaritmo

$$v_{o'} = v_o \left(1 + \frac{R_F}{R_T} \right)$$

fazendo $\rightarrow R_F \gg R_T$

$$v_{o'} = v_o \frac{R_F}{R_T} \therefore v_{o'} = -nV_T \frac{R_F}{R_T} \ln \left(\frac{v_i}{I_{ref} \cdot R} \right)$$

$$v_{o'} = -nV_T \cdot \frac{R_F}{R_T} \ln \left(\frac{v_i}{I_{ref} \cdot R} \right)$$

R_T deve ser escolhido de modo a possuir uma variação de temperatura que compense a variação de V_T , ou seja: $\frac{dR_T}{R_T dT} = \frac{dV_T}{dT}$

Pode ser feita uma associação de R_T com resistor(es) fixo(s) para obter a variação adequada.

Normalmente faz-se $I_{ref} \cdot R = 1$ e $nV_T \cdot \frac{R_F}{R_T} = 1$, de modo a obter-se:

$$v_{o'} = -\ln v_i$$

➤ Resposta em frequência para o amplificador logarítmico

Usando as aproximações:

1 - Diodo $\equiv$ resistor variável

2 - $R_d =$ resistência do diodo variável com a corrente de polarização

Podemos equacionar o circuito do amplificador logarítmico da figura 16 da seguinte forma:

$$\begin{aligned} r_d &= \frac{dV_d}{dI_d} & V_d &= nV_T \ln \left(\frac{I_d}{I_s} \right) \\ r_d &= n \frac{V_T}{I_d} & I_d &= \frac{v_i}{R} \\ \therefore r_d &= \frac{nV_T R}{v_i} \end{aligned}$$

Para o amplificador inversor temos:

$$f_{CS} = f_T \frac{R}{r_d} = f_T \frac{R v_i}{nV_T R} \therefore f_{CS} = f_T \frac{v_i}{nV_T}$$

Onde: f_{CS} = frequência de corte

f_T = frequência de transição do AmpOp

Obs. 1: A frequência de corte depende da amplitude de entrada v_i

Obs. 2: Para tensões de entrada negativas muda-se a polaridade do diodo.

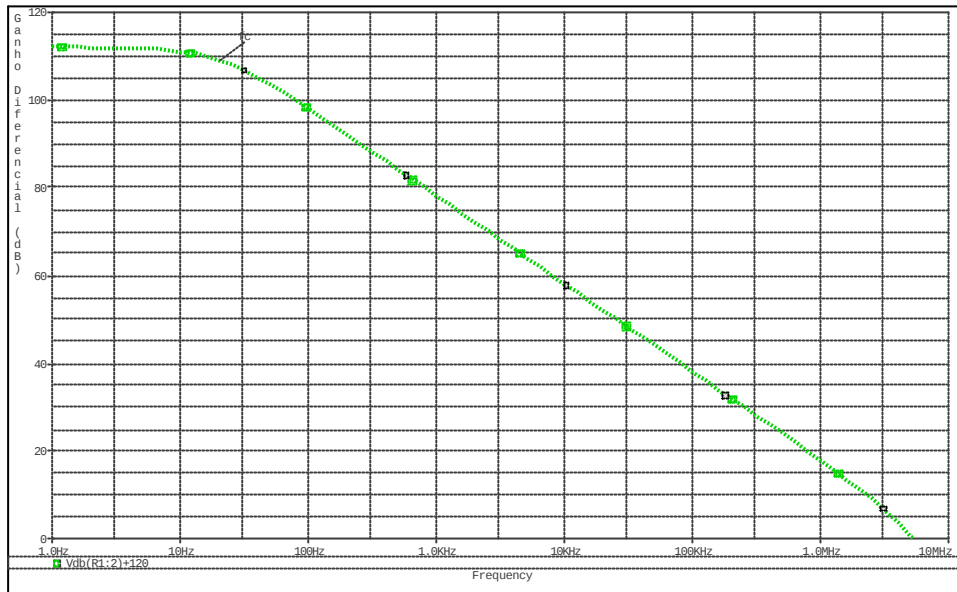


Figura 18: Resposta em frequência do circuito amplificador logaritmo (ganho X frequência).

1.3.3 Operador Exponencial

Circuito que realiza a operação de exponencial em uma tensão de entrada v_i .

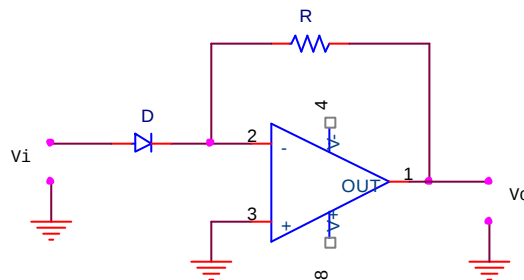


Figura 19: Circuito amplificador Exponencial

$$V^+ = V^- = 0$$

$$v_i = v_d$$

$$\left. \begin{aligned} I_d &= \frac{V_R}{R} \\ V_R &= -v_o \end{aligned} \right\} I_d = -\frac{v_o}{R} \text{ (saída)}$$

entrada :

$$I_d = I_s \left(e^{\frac{V_d}{nV_T}} - 1 \right)$$

$$\text{para } \rightarrow V_d \gg nV_T \Rightarrow I_d = I_s e^{\frac{V_d}{nV_T}}$$

$$\therefore v_o = -R \cdot I_s \cdot e^{\left(\frac{v_i}{n \cdot V_T} \right)}$$

Da mesma forma que no amplificador logarítmico, faz-se necessário compensar as variações de V_T e I_s com a temperatura através de um circuito de compensação.

➤ Compensação de temperatura

a) Compensação de I_S : usa-se um segundo diodo idêntico polarizado diretamente com uma corrente constante e conectado à entrada do circuito de modo a subtrair a tensão do diodo D1.

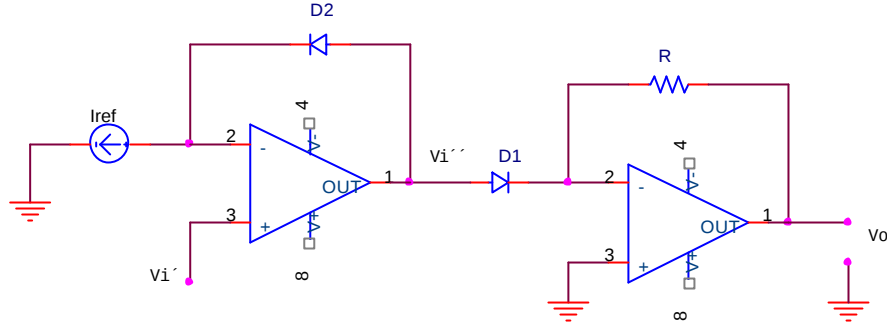


Figura 20: Circuito amplificador Exponencial com compensação de I_S .

b) Compensação de V_T : utiliza-se um divisor de tensão na entrada com ganho variável com a temperatura, através de um resistor (R_T) cuja resistência é função da temperatura.

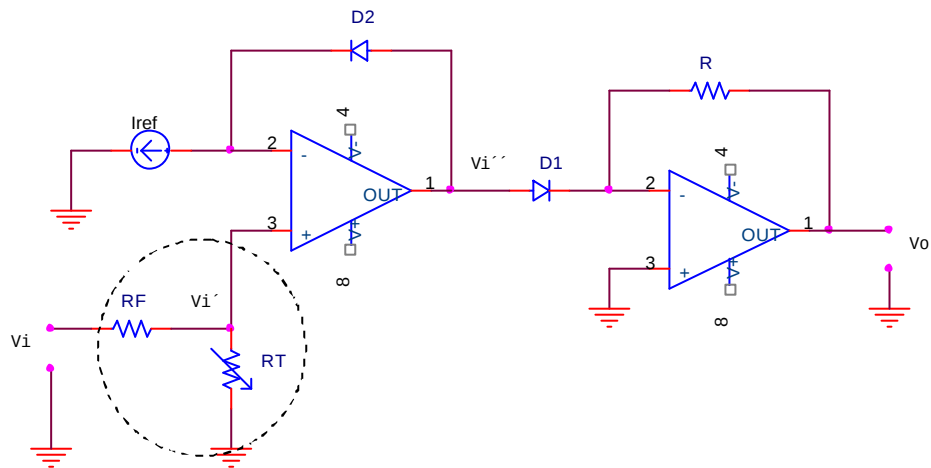


Figura 21: Circuito amplificador Exponencial com compensação de I_S e V_T .

$$v_{i'} = v_i \frac{R_T}{R_F + R_T}$$

$$\text{Para } R_F \gg R_T \therefore v_{i'} = v_i \frac{R_T}{R_F}$$

R_T deve ser escolhido de modo a possuir uma variação de temperatura que compense a variação de V_T , ou seja: $\frac{dR_T}{R_F dT} = \frac{dV_T}{dT}$

$$\text{Compensação final: } v_o = -R \cdot I_{ref} \cdot e^{\left(\frac{v_i \cdot R_T}{R_F \cdot n \cdot V_T} \right)}$$

Normalmente faz-se $I_{ref} \cdot R = 1$ e $n \cdot V_T \cdot \frac{R_F}{R_T} = 1$, de modo a obter-se: $v_o = -e^{v_i}$

➤ Resposta em Frequência para amplificador Exponencial

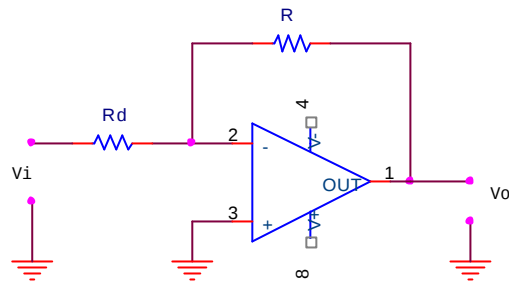


Figura 22: Circuito equivalente para determinar a resposta em frequência.

Temos a resistência dinâmica do diodo D1: $r_d = \frac{nV_T}{I_d}$

$$f_C = f_T \frac{r_d}{R} = \frac{f_T}{A} \therefore f_C = \frac{nV_T}{I_d R}$$

$$\left. \begin{array}{l} v_o = -R I_d \\ |v_o| = R I_d \end{array} \right\} I_d = \frac{|v_o|}{R}$$

$$\text{Portanto temos: } f_C = f_T = \frac{nV_T}{v_o}$$

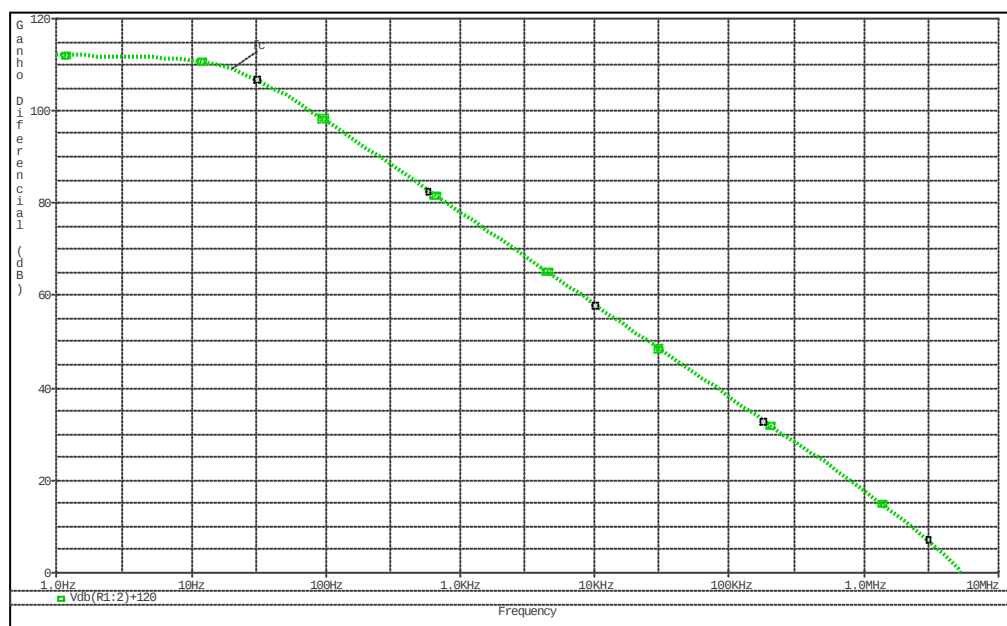


Figura 23: Resposta em Frequência do amplificador exponencial.

➤ Amplificadores log e exp com transistores

Transistores podem ser usados como diodos nos amplificadores log e exp, possibilitando algumas melhorias:

- Maior faixa dinâmica (amplitude) que os amplificadores a diodo;
- Maior “linearidade” da função.

Para consulta adicional:

[www.electronics.dit.ie/staff/ypanarin/Lecture_Notes/DT021-4/6AntiAndLogAmplifiers\(4p\).pdf](http://www.electronics.dit.ie/staff/ypanarin/Lecture_Notes/DT021-4/6AntiAndLogAmplifiers(4p).pdf)

➤ Mudança de base em amplificadores log

As junções semicondutoras possuem sempre comportamento exponencial com base neperiana. Para obter amplificadores log com base qualquer, utiliza-se um circuito adicional dimensionado a partir das propriedades de mudança de base de logaritmo.

Temos que:

$$\log_B x = \frac{\log_A x}{\log_A B}.$$

Considerando A como sendo a base neperiana: $\log_B x = \frac{\ln x}{\ln B}$

Assim para obter-se $\log_B v_i$, faz-se:

$\frac{\ln v_i}{\ln B}$ onde $\ln B$ é uma constante e pode ser facilmente implementada com amplificadores (quando $\ln B < 1$) ou divisores de tensão (quando $\ln B > 1$).

Exemplo 02): Encontre v_o sabendo que $v_o = \log_{10} v_i$ e $B = 10$.

Solução:

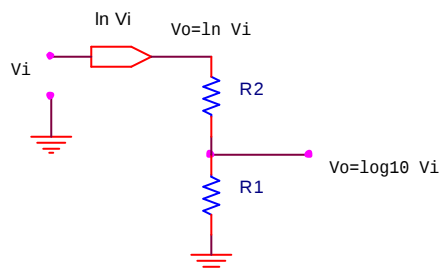


Figura 24: Figura exemplo 02

$$v_o = v_{o'} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

$$\frac{v_o}{v_{o'}} = \frac{1}{\ln 10}$$

$$\frac{R_1}{R_1 + R_2} = \ln 10 = 2,303$$

Arbitrando R_1 e calculando R_2 temos: $R_1 = 1K\Omega$ e $R_2 = 1,3K\Omega$

Exemplo 03) Usando $B = 2$ determine $v_o = \log_2 v_i$

Solução:

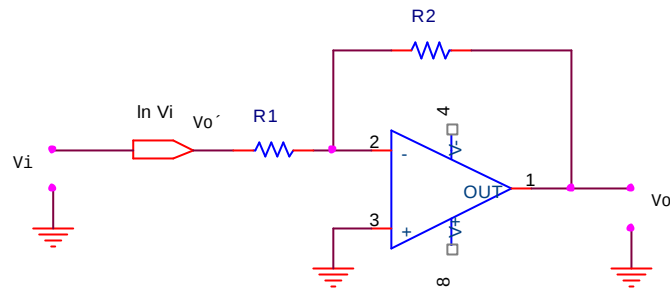


Figura 25: Figura exemplo 03

$$\ln 2 = 0,693 < 1$$

$$v_o = -v_o' \left(\frac{R_2}{R_1} \right) \Rightarrow -\frac{R_2}{R_1} = \frac{-1}{\ln 2} \therefore \ln 2 = \frac{R_1}{R_2}$$

$$\frac{v_o}{v_o'} = \frac{-1}{\ln 2} \Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \ln 2 = 0,693$$

$$\text{se } R_1 = 10K\Omega \text{ temos } R_2 = 14,43K\Omega$$

Obs.: Este circuito inversor compensa a polaridade negativa da saída do amplificador logaritmo.