

### 2.1.4 Valor médio de um sinal retificado

Por definição temos que o valor médio  $V_m$  de uma tensão alternada  $v(t)$  é:

$$V_m = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) dt$$

Para um sinal senoidal temos:

$$v(t) = V_p \text{sen}(2\pi ft) = V_p \text{sen}(\omega t)$$

$$\omega = 2\pi f$$

onde  $V_p$  é a tensão de pico e  $f$  a frequência do sinal.

a) Retificação em meia onda:

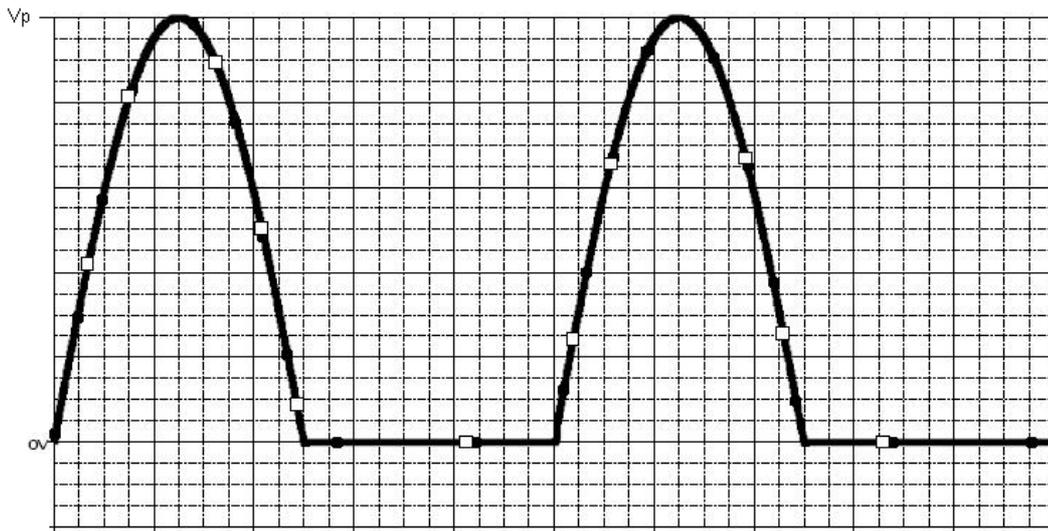


Figura 14:  $V_o$  x  $t$  no retificador de meia onda

Integrando separadamente os semiciclos positivo e negativo e mudando a variável de integração para  $\omega t$  de modo que o período  $T=2\pi$ , temos:

$$V_m = \frac{1}{T} \left[ \int_0^{T/2} v(\omega t) d\omega t + \int_{T/2}^T v(\omega t) d\omega t \right]$$

$$V_m = \frac{1}{2\pi} \left[ \int_0^{T/2} V_p \text{sen}(\omega t) d\omega t + 0 \right]$$

$$V_m = \frac{1}{2\pi} [V_p (-\cos \pi + \cos 0)]$$

$$V_m = \frac{1}{2\pi} [V_p \cdot 2]$$

$$V_m = \frac{V_p}{\pi}$$

b) Retificação em onda completa:

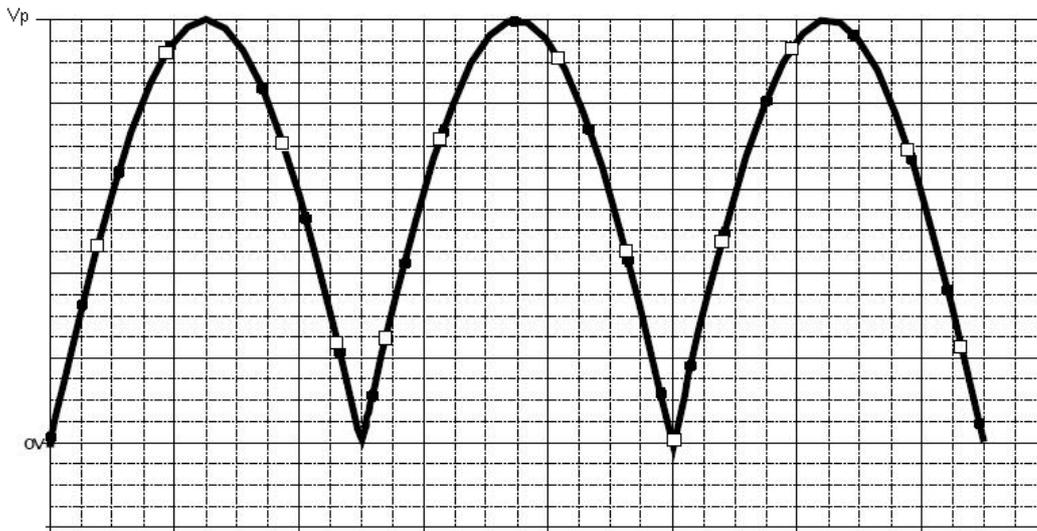


Figura 15: Vo x t no retificador de onda completa

$$V_m = \frac{1}{T} \left[ \int_0^{T/2} v(\omega t) d\omega t + \int_{T/2}^T v(\omega t) d\omega t \right]$$

$$V_m = \frac{1}{2\pi} \left[ 2 \int_0^{T/2} V_p \text{sen}(\omega t) d\omega t \right]$$

$$V_m = \frac{2}{2\pi} [V_p (-\cos\pi + \cos 0)]$$

$$V_m = \frac{1}{\pi} [V_p \cdot 2]$$

$$V_m = \frac{2V_p}{\pi}$$

Quando o retificador está operando em frequências elevadas, onde a *slew rate* gera um erro no ângulo de retificação, o valor médio também conterá um erro que será função deste ângulo. Considerando-se  $\phi$  o ângulo inicial da retificação, como mostrado na Figura 16, temos:

c) Retificação em meia onda (Figura 16):

$$V_m = \frac{1}{T} \left[ \int_{\phi}^{T/2} v(\omega t) d\omega t + \int_{T/2}^{T+\phi} v(\omega t) d\omega t \right]$$

$$V_m = \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{\phi}^{T/2} V_p \text{sen}(\omega t) d\omega t + 0 \right]$$

$$V_m = \frac{1}{2\pi} [V_p (-\cos\pi + \cos\phi)]$$

$$V_m = \frac{V_p}{2\pi} [1 + \cos\phi]$$

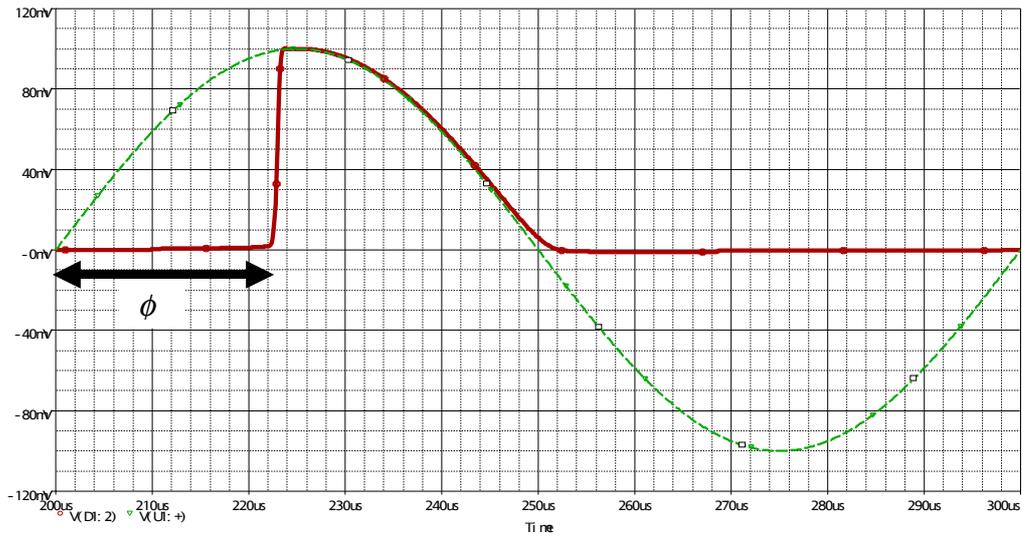


Figura 16: Vo x t no retificador de meia onda com erro no ângulo devido à SR do AMPOP

d) Retificação em onda completa:

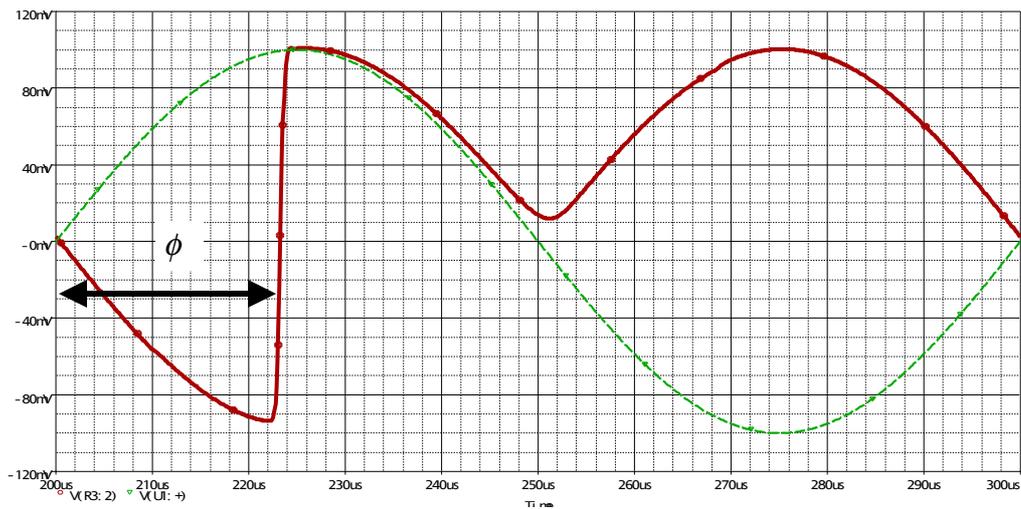


Figura 17: Vo x t no retificador de onda completa com erro no ângulo devido à SR do AMPOP

$$V_m = \frac{1}{T} \left[ \int_{\phi}^{T/2} v(\omega t) d\omega t - \int_{T/2}^{T+\phi} v(\omega t) d\omega t \right]$$

$$V_m = \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{\phi}^{\pi} V_p \text{sen}(\omega t) d\omega t - \int_{\pi}^{2\pi+\phi} V_p \text{sen}(\omega t) d\omega t \right]$$

$$V_m = \frac{1}{2\pi} \left[ V_p (-\cos \pi + \cos \phi) - V_p (-\cos \phi + \cos \pi) \right]$$

$$V_m = \frac{V_p}{\pi} [1 + \cos \phi]$$

### 2.1.3 Circuito para obtenção do valor médio:

Por definição, o valor médio é a integral definida da tensão de entrada, de um tempo 0 até T, dividida pelo tempo T. T corresponde a um tempo que pode ser um ou mais períodos do sinal de entrada.

$$V_m = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) dt$$

Um circuito prático que realiza a operação de integração temporal definida é composto por um filtro passa-baixas RC, como mostrado na Figura 18. Ele difere do circuito integrador indefinido pelo fato de que o AMPOP utilizado faz com que a tensão de saída tenda a infinito (caso ideal) quando a frequência de entrada tende a zero. No integrador definido, dada uma tensão de entrada contínua (frequência zero)  $V_i$ , a saída tende em  $V_i$  para o tempo tendendo a infinito.

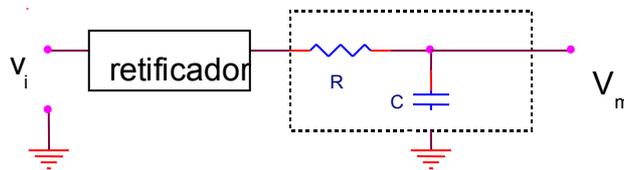


Figura 18: Filtro passa baixas RC para obtenção do valor médio do sinal retificado

#### Características do Filtro Passa-Baixas:

Analisando pelo aspecto da resposta em frequência, a função do filtro passa baixas no circuito é:

- atenuar as componentes AC (harmônicas do sinal de entrada retificado)
- manter a componente DC (valor médio)

A tensão de saída do filtro  $v_o$  pode ser analisada considerando-se um divisor de tensão formado pelos R e C, podendo ser expressa como:

$$v_o = v_i \frac{X_c}{R + X_c}, \text{ onde: } X_c = \frac{1}{j\omega C} \text{ e } \omega = 2\pi f$$

É fácil observar pela expressão que quando a frequência tende a zero (DC)  $v_o = v_i$ , que no caso é o valor médio  $V_m$ . À medida que a frequência aumenta a reatância capacitiva  $X_c$  diminui, reduzindo a amplitude de saída  $v_o$  em relação a  $v_i$ . Há também uma alteração da fase de  $v_o$ , mas em termos práticos de filtragem do sinal retificado apenas o módulo de  $v_o$  é considerado. Dessa forma a equação pode ser reescrita como sendo:

$$|v_o| = v_i \frac{|X_c|}{\sqrt{R^2 + |X_c|^2}}$$

Para analisar a resposta do filtro no domínio da frequência, decompõe-se o sinal de entrada em suas diversas componentes espectrais através da análise por série de Fourier. Um sinal senoidal retificado em onda completa pode ser escrito matematicamente sob a forma:

$$v(t) = V_p |\text{sen } \omega t|$$

Pode-se demonstrar que esse sinal é formado pela seguinte série:

$$v(t) = \frac{2V_p}{\pi} - \frac{4V_p}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} \Rightarrow v(t) = \frac{2V_p}{\pi} - \frac{4V_p}{3\pi} \cos(2\omega t) - \frac{4V_p}{15\pi} \cos(4\omega t) - \frac{4V_p}{35\pi} \cos(6\omega t) \dots$$

Para um sinal retificado em meia onda, a série de Fourier correspondente tem a seguinte forma:

$$v(t) = \frac{V_p}{\pi} + \frac{V_p}{2} \sin(\omega t) - \frac{2V_p}{3\pi} \cos(2\omega t) - \frac{2V_p}{15\pi} \cos(4\omega t) - \frac{2V_p}{35\pi} \cos(6\omega t) \dots$$

Observa-se que a 1ª parcela das séries é uma tensão DC correspondente ao valor médio do sinal retificado. As demais parcelas correspondem à componente AC do sinal, devendo então serem atenuadas (filtradas) pelo filtro passa baixas. No sinal retificado em onda completa a menor frequência presente é  $2\omega$ , sendo que em meia onda a menor frequência é  $\omega$ . O filtro passa baixas é o responsável pela atenuação das componentes AC do sinal e no seu projeto deve ser analisada a menor frequência, pois é a que apresenta maior amplitude e menor atenuação (pior caso). As demais frequências além de possuírem menor amplitude sofrerão uma maior atenuação, podendo ser desprezadas nessa análise. O projeto do filtro será abordado a seguir tendo como parâmetros o *ripple* e o tempo de resposta do filtro

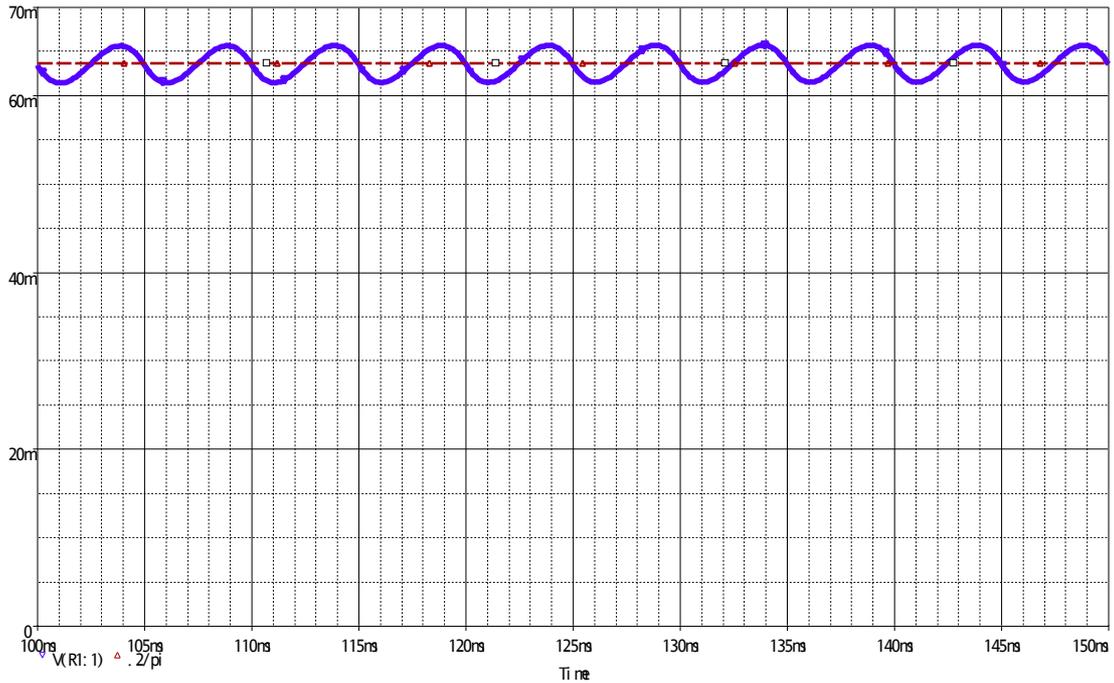
### Ripple:

A componente AC que existe após a filtragem é denominada tensão de *ripple* ( $v_r$ ) e é composta essencialmente pela menor frequência existente no sinal retificado. O *ripple* aparece na saída somado ao nível médio DC ( $V_m$ ), como mostrado na Figura 19: Conversor ângulo-tensão com multiplicador. O *ripple* é geralmente avaliado através do percentual do valor de pico, pico-a-pico ou RMS da componente AC em relação ao valor médio DC:

$$Ripple_{RMS} = \frac{v_{r_{RMS}}}{V_m} \cdot 100\%$$

$$Ripple_{pico} = \frac{v_{r_{pico}}}{V_m} \cdot 100\%$$

$$Ripple_{pp} = \frac{v_{r_{pp}}}{V_m} \cdot 100\%$$



**Figura 19:** Tensão de saída de um retificador de onda completa após filtragem com  $R=10*|X_c|$

Para projeto do filtro RC toma-se o valor do *ripple* desejado e a amplitude da menor freqüência presente no sinal retificado ( $\omega'$ ) e calcula-se a tensão de ripple ( $v_r$ ) naquela freqüência a partir da expressão:

$$v_r = v_i \frac{|X_c|}{\sqrt{R^2 + |X_c|^2}} \therefore v_r = v_i \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega' RC)^2}}$$

Obs: O valor de  $v_i$  deve ser coerente com o tipo de ripple especificado (RMS, pico ou pico-a-pico).

Para retificação em onda completa usa-se a freqüência  $\omega'=4\pi f_i$  e:

$$\text{RMS: } v_{iRMS} = \frac{4V_p}{3\pi\sqrt{2}} \quad \text{pico: } v_{ipico} = \frac{4V_p}{3\pi} \quad \text{pico-a-pico: } v_{ipp} = \frac{8V_p}{3\pi}$$

Para retificação em meia onda usa-se a freqüência  $\omega'=2\pi f_i$  e:

$$\text{RMS: } v_{iRMS} = \frac{V_p}{2\sqrt{2}} \quad \text{pico: } v_{ipico} = \frac{V_p}{2} \quad \text{pico-a-pico: } v_{ipp} = V_p$$

O *ripple* depende da freqüência do sinal de entrada. Quando o sinal de entrada possui freqüência variável, o ripple deve ser calculado considerando-se o pior caso, ou seja, a menor freqüência de entrada.

**Exemplo:** Projete um filtro passa baixas para um retificador de onda completa cuja frequência de entrada varia de 50 a 400 Hz, para um *ripple* RMS máximo de 2%.

Solução: Como o sinal de entrada tem frequência variável, toma-se a menor frequência que representa o pior caso  $f_i=50$  Hz. Sendo o retificador de onda completa, a menor frequência angular presente após a retificação é:

$$\omega' = 4\pi \cdot 50 = 200\pi \text{ rad/s}$$

$$Ripple_{RMS} = \frac{v_{r_{RMS}}}{V_m} \cdot 100\% = 2\%$$

$$v_{r_{RMS}} = v_{i_{RMS}} \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega' RC)^2}} \quad \text{sendo: } v_{i_{RMS}} = \frac{4V_p}{3\pi\sqrt{2}} \quad \text{logo: } v_{r_{RMS}} = \frac{4V_p}{3\pi\sqrt{2}\sqrt{1 + (\omega' RC)^2}}$$

$$V_m = \frac{2V_p}{\pi}$$

$$\frac{v_{r_{RMS}}}{V_m} = \frac{4V_p}{3\pi\sqrt{2}\sqrt{1 + (\omega' RC)^2}} \frac{\pi}{2V_p} = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{1 + (200\pi RC)^2}} = 0,02$$

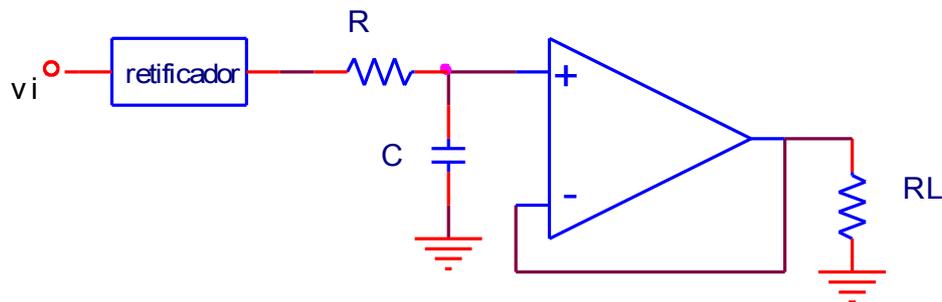
A constante de tempo RC do filtro é:  $RC = 3,748 \cdot 10^{-2} \text{ s}$

Fazendo-se  $C=10 \mu\text{F}$ , tem-se  $R \approx 3,75 \text{ k}\Omega$ .

Para uma frequência de entrada  $f_i=400$  Hz, o ripple será:

$$\frac{v_{r_{RMS}}}{V_m} = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{1 + (1600\pi \cdot 3,748 \cdot 10^{-2})^2}} = 0,0025 \therefore Ripple_{RMS} = 0,25\%$$

Obs.: Para eliminar a influência da impedância de uma carga RL ligada à saída do filtro RC, isola-se a carga do filtro através de um amplificador de ganho unitário (*buffer*) com AMPOP, como mostrado na .



**Figura 20:** Filtro RC com *buffer* de saída

### Tempo de resposta:

O tempo de resposta do filtro está diretamente ligado à constante de tempo RC. O aumento da tensão tem a forma exponencial tendendo a  $V_m$  para  $t \rightarrow \infty$ . Considerando o capacitor inicialmente descarregado no tempo  $t=0$ , tem-se:

$$v_o(t) = V_m \cdot (1 - e^{-t/RC})$$

A tensão de saída  $V_o$  atinge  $0,63 V_m$  para um tempo  $t = \tau = RC$ . O tempo de resposta depende apenas do circuito RC, sendo independente da frequência ou amplitude do sinal de entrada.

Dimensionamento do filtro RC pelo tempo de resposta:

O tempo de resposta deve ser levado em conta no dimensionamento do filtro de modo que variações temporais no valor médio possam ser observadas na saída em tempos relativamente curtos. O tempo de resposta pode ser calculado considerando-se o erro na tensão de saída em relação ao valor médio.

**Exemplo:** Determine o tempo para que  $V_o$  atinja 90% de  $V_m$  (erro de 10%), considerando-se  $V_o(0)=0$ .

$$\frac{v_o(t)}{V_m} = 0,9 = (1 - e^{-t/RC})$$

$$\ln(0,1) = \frac{-t}{RC} \therefore t = 2,3RC$$

Considerando os valores de RC do exemplo anterior, tem-se:

$$t = 8,62 \cdot 10^{-2} s$$

## 2.2 Detetor de Pico e Grampeador

### 2.2.1 Circuito detetor de pico

Detecta e mantém o valor máximo (pico) de um sinal AC durante um dado intervalo de tempo. É semelhante ao retificador de  $\frac{1}{2}$  onda, com exceção do resistor de saída que é substituído por um capacitor. Este circuito também é chamado de retificador de pico.

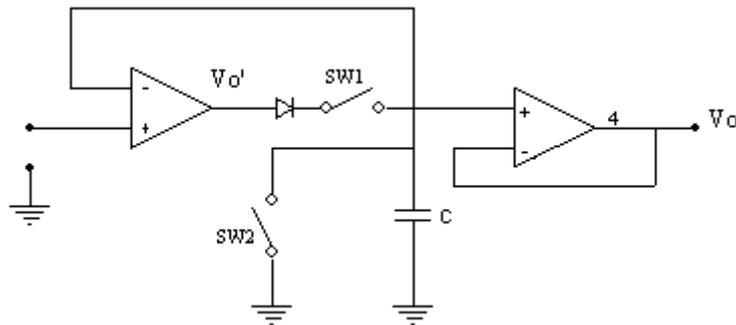


Figura 21: Circuito detetor de pico

### Análise de Funcionamento

A análise do circuito pode ser dividida em 3 etapas:

1. Detecção de pico
2. Retenção do pico
3. Descarga do capacitor (Reset)

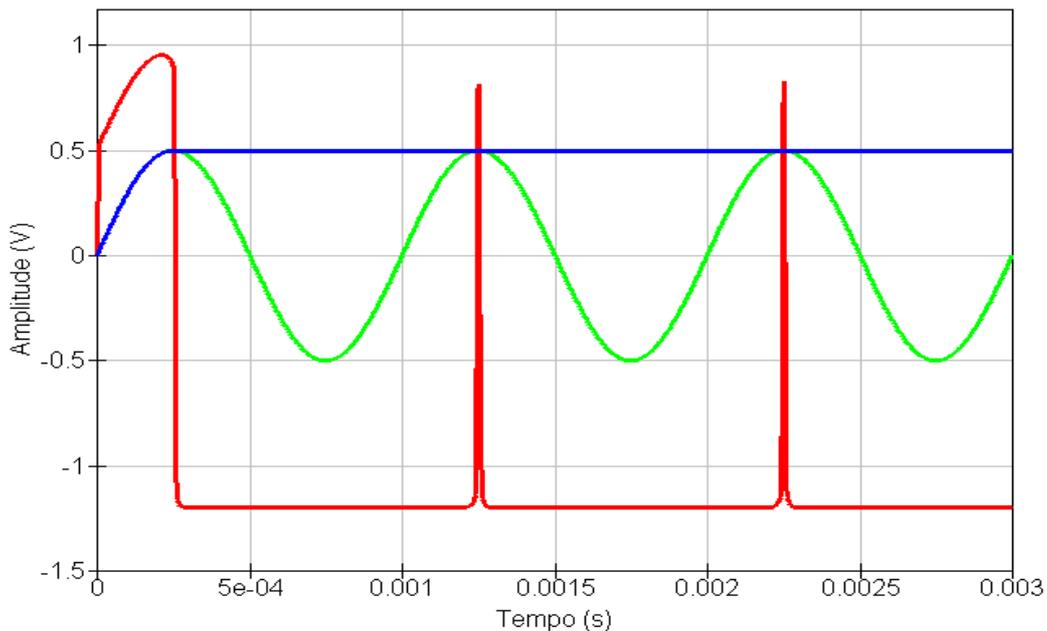


Figura 22: Tensões de entrada (verde), de saída  $V_o$  (azul) e na saída do AMPOP1  $V_o'$  (vermelho) em função do tempo

Nas etapas 1 e 2 a chave SW1 está fechada (conduzindo) e a chave SW2 está aberta. Durante o semiciclo positivo do sinal de entrada, o capacitor se carrega através do AMPOP1 e do diodo até o valor de pico de  $v_i$  (etapa 1). Uma vez carregado com o valor de pico, as cargas se mantêm no capacitor durante o restante do semiciclo positivo e negativo, pois o diodo encontra-se reversamente polarizado. As eventuais perdas de carga no capacitor são repostas durante a passagem de  $V_i$  pelo valor de pico nos próximos semiciclos (vide figura 22). Na etapa 3 a chave SW1 está aberta e a chave SW2 está fechada (conduzindo), zerando as cargas no capacitor e levando a tensão de saída para 0 V. O AMPOP2 é usado como *buffer* para evitar que o capacitor perca as cargas para uma carga acoplada à saída.

Os tempos de carga e descarga do capacitor através das chaves, diodo e AMPOP devem ser calculados levando-se em conta a máxima frequência de operação do circuito e as correntes de carga e descarga.

### 2.2.2 Circuito Grampeador

Este circuito adiciona um nível DC a um sinal de entrada AC. Também é chamado de restaurador de nível DC.

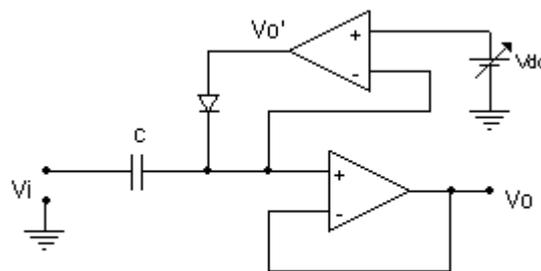


Figura 23: Circuito Grampeador

### Análise de Funcionamento

Considerando inicialmente a tensão  $V_{dc}=0$  e o capacitor descarregado, durante o semiciclo positivo de  $V_i$  o diodo está polarizado reversamente pois a tensão  $V_{o'}$  na saída do AMPOP1 é negativa. O sinal de entrada passa à saída  $V_o$  sem alteração.

Durante o semiciclo negativo a tensão na entrada – do AMPOP fica inferior a  $V_{dc}$ , levando a sua saída  $V_{o'}$  a uma tensão positiva que irá polarizar diretamente o diodo e carregar o capacitor até a tensão de pico negativa  $V_p^-$  de  $V_i$  (figura 25). Essa tensão ficará armazenada no capacitor nos próximos semiciclos pois o diodo estará reversamente polarizado. Dessa forma a tensão de saída é a soma da tensão  $V_i$  mais a tensão no capacitor:

$$V_o = V_i + V_c = V_i - V_p^-$$

Se a tensão de pico negativa for igual à tensão de pico positiva:

$$V_o = V_i + V_p$$

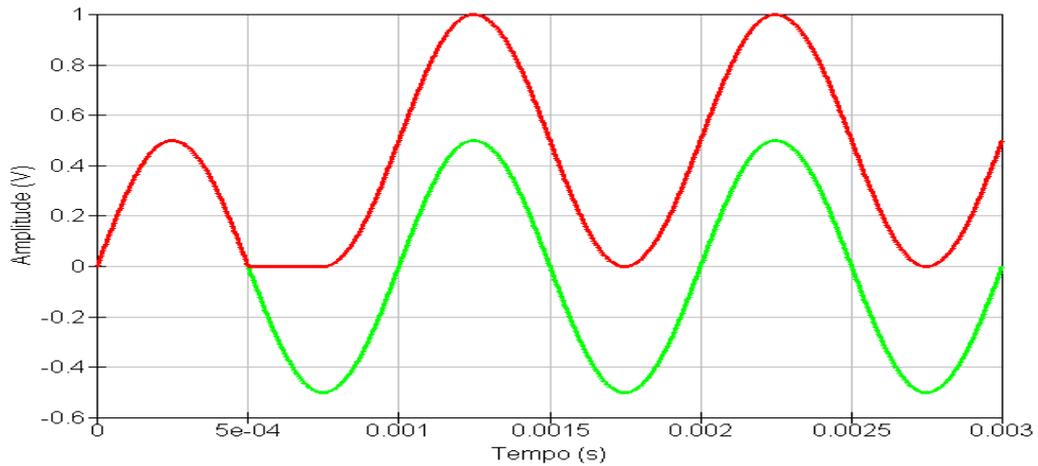


Figura 24: Tensões de entrada  $V_i$  (verde) e de saída  $V_o$  (vermelho) em função do tempo para  $V_{dc}=0$

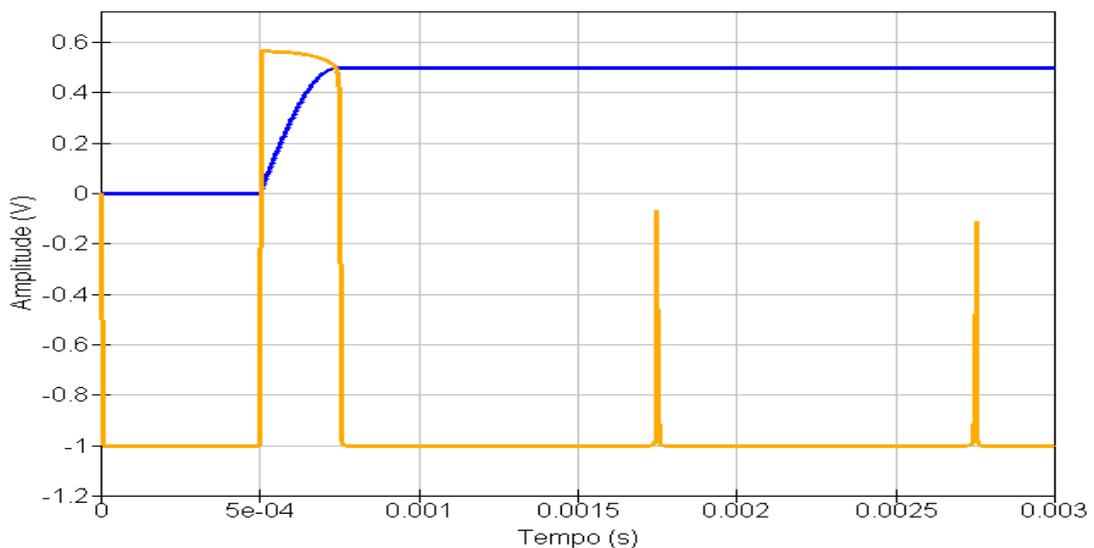


Figura 25: Tensão no capacitor (azul) e tensão na saída do AMPOP1 (laranja) em função do tempo

Caso a tensão da fonte DC aplicada à entrada + do AMPOP seja diferente de zero, ela será somada à saída  $V_o$ , resultando em:

$$V_o = V_i + V_p + V_{dc}$$

As eventuais perdas de carga no capacitor são repostas durante a passagem de  $V_i$  pelo valor de pico negativo nos próximos semiciclos (vide figura 23). O AMPOP2 é usado como *buffer* para evitar que o capacitor perca as cargas para uma carga acoplada à saída.

Os tempos de carga e descarga do capacitor através do diodo e AMPOP devem ser calculados levando-se em conta a máxima frequência de operação do circuito e as correntes de carga e descarga.

## 2.3 Conversores Ângulo-Tensão

São circuitos que fornecem uma tensão DC proporcional ao ângulo entre dois sinais AC de mesma frequência. A tensão de saída é composta por um sinal AC e um sinal DC. Um filtro passa baixas é usado para atenuar as componentes AC e deixar passar o valor médio (DC).

a) Conversor  $\emptyset \rightarrow V$  com multiplicador de tensões:

Duas tensões senoidais quando multiplicadas geram um termo proporcional à diferença de fase entre as mesmas.

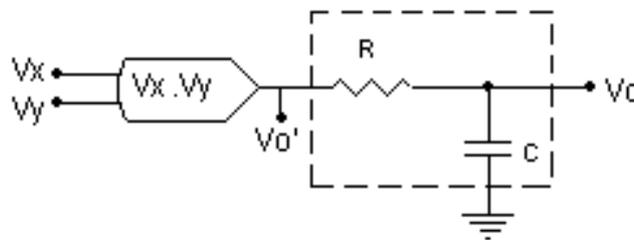


Figura 19: Conversor ângulo-tensão com multiplicador

Para  $v_x$  e  $v_y$  senoidais:

$$v_x = A(\cos \omega t + \emptyset_1)$$

$$v_y = B(\cos \omega t + \emptyset_2)$$

$$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a + b) + \cos(a - b)]$$

$$v_o' = v_x \cdot v_y = \frac{AB}{2} [\cos(2\omega t + \emptyset_1 + \emptyset_2) + \cos(\omega t - \emptyset_1 - \omega t - \emptyset_2)]$$

$$v_o' = \frac{AB}{2} \left[ \underbrace{\cos(2\omega t + \emptyset_1 + \emptyset_2)}_{AC} + \underbrace{\cos(\emptyset_2 - \emptyset_1)}_{DC} \right]$$

Após a operação de multiplicação o sinal  $v_o'$  é filtrado por um passa baixas para atenuar a componente AC, que deve ser projetado a partir dos critérios de ripple e tempo de resposta tomando-se o dobro da menor frequência dos sinais de entrada.

Este conversor possui dois inconvenientes:

- tensão proporcional ao cosseno da diferença angular
- dependência da tensão de saída com a amplitude dos sinais de entrada

b) Conversor  $\emptyset \rightarrow V$  com porta lógica XOR (Exclusive OU)

Este conversor é baseado na operação lógica exclusiva-ou cuja tabela verdade é mostrada a seguir. Para eliminar a dependência da tensão de saída com a amplitude de entrada, são usados comparadores de tensão (AMPOP's em malha aberta) que geram uma tensão quadrada a partir de uma forma de onda qualquer de entrada (). Dessa forma a tensão de entrada da porta XOR é um sinal digital (quadrado) com amplitude variando entre  $V_{sat}^-$  e  $V_{sat}^+$ .

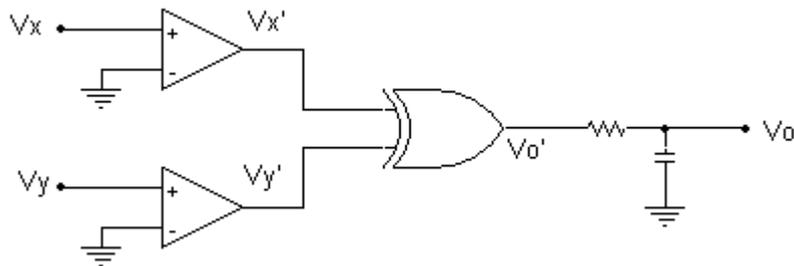


Figura 20: Conversor ângulo-tensão com porta lógica XOR

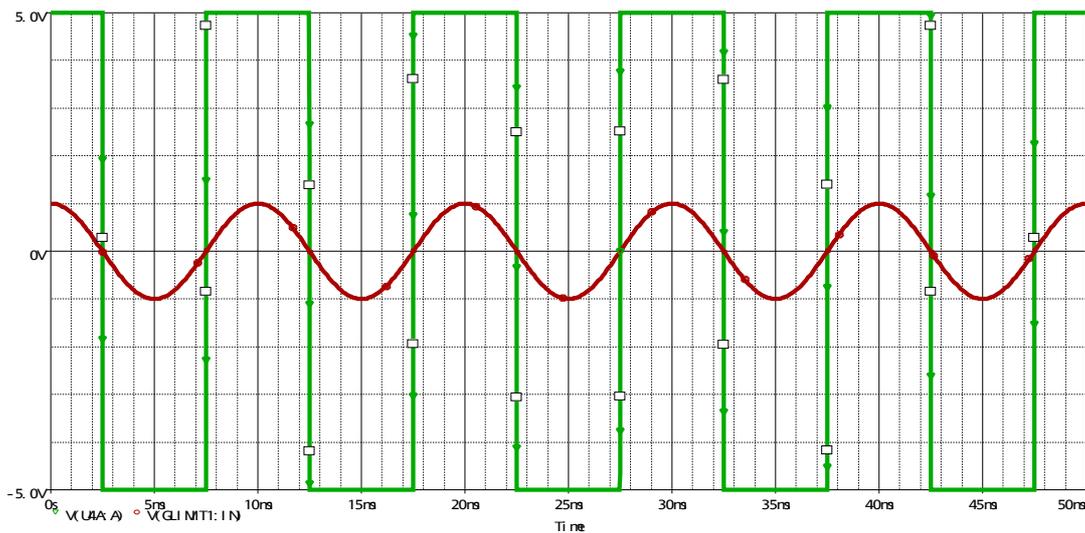


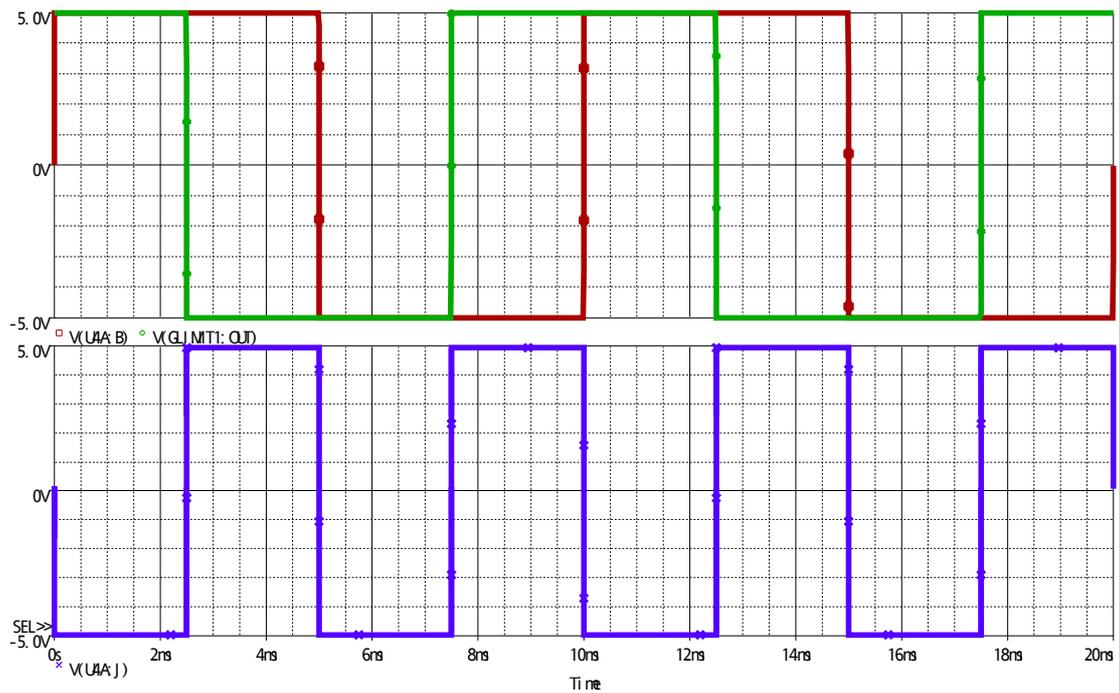
Figura 23: Tensões de entrada (senoidal) e saída (quadrada) de um comparador de tensões

Tabela Verdade da porta lógica XOR:

X	Y	S	$V_{x'}$	$V_{y'}$	$V_{o'}$
0	0	0	$V_{sat}^-$	$V_{sat}^-$	$V^-$
1	0	1	$V_{sat}^+$	$V_{sat}^-$	$V^+$
0	1	1	$V_{sat}^-$	$V_{sat}^+$	$V^+$
1	1	0	$V_{sat}^+$	$V_{sat}^+$	$V^-$

$$V_{o'} = V^+ \text{ se } V_{x'} = V_{sat}^+ \neq V_{y'} \text{ ou } V_{x'} = V_{sat}^- \neq V_{y'}$$

$$V_{o'} = V^- \text{ se } V_{x'} = V_{y'}$$



**Figura 24:** Tensões das entradas ( $V_x'$  e  $V_y'$ ) e saída da porta XOR quando a diferença de fase é  $\pi/2$

Considerando  $v^+$  e  $v^-$  as tensões de alimentação da porta XOR, tem-se que sua tensão de saída  $V_o'$  em função do ângulo entre  $V_x'$  e  $V_y'$  é:

$$V_o' = v^+ \text{ se } 0 < \phi < \theta$$

$$V_o' = v^- \text{ se } \theta < \phi < \pi$$

O valor médio de  $V_o'$  pode ser calculado como:

$$P_{dB} = 10 \log_{10} \frac{v^2}{RP_{ref}} = 20 \log_{10} \left[ \frac{v}{\sqrt{RP_{ref}}} \right]$$

$$V_m = \frac{1}{T} \int_0^T V_o'(t) dt$$

$$V_m = \frac{1}{\pi} \left[ \int_0^\theta V^+ d\theta + \int_\theta^\pi V^- d\theta \right]$$

$$V_m = \frac{1}{\pi} \left[ V^+ \theta + V^- \pi - V^- \theta \right]$$

Se  $V^- = -V^+$

$$V_m = \frac{V^+ (2\theta - \pi)}{\pi}$$

Este conversor possui a vantagem de ter a tensão de saída diretamente proporcional à diferença angular e ser invariável com a amplitude do sinal de entrada.