EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARA ENGENHARIA ELÉTRICA
TE 315

Aula 03_2

SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS DE EQAUÇÕES LINEARES HOMOGÊNEAS

Soluções Fundamentais

INTRODUÇÃO

Na última aula, mostramos como resolver algumas equações diferenciais da forma

$$ay'' + by' + cy = 0$$

em que a, b e c são constantes. A partir desses resultados, vamos obter uma visão mais clara da estrutura das soluções de todas as equações lineares homogêneas de segunda ordem...

Ao discutir propriedades gerais das equações diferenciais lineares, é conveniente usar a notação de **operador diferencial**. Sejam p e q funções contínuas em um intervalo aberto I — ou seja, para $\alpha < t < \beta$. Os casos $\alpha = -\infty$, $\beta = \infty$ ou ambos estão incluídos. Então, para qualquer função ϕ duas vezes diferenciável em I, **definimos o operador diferencial L** pela fórmula

$$L[y](\mathrm{t}) = y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t)$$

Soluções Fundamentais

INTRODUÇÃO

Exemplo: se $p(t) = t^2$, $q(t) = 1 + t$ e $y(t) = \text{sen}\, 3t$, $I=(0,2\pi)$ então L[y] será

$$L[y](\mathrm{t}) = (sen\,3t)'' + t^2(sen\,3t)' + (1+t)\,sen\,3t$$

$$L[y](\mathrm{t}) = -9\,sen\,3t + 3t^2 sen\,3t + (1+t)\,sen\,3t$$

Vamos estudar, nesta aula, a equação diferencial linear homogênea de segunda ordem L[y](t) = 0 junto com as condições iniciais...

$$L[y] \equiv y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \qquad y(t_0) = y_0 \qquad y'(t_0) = y_0'$$

Queremos saber se sempre tem solução e se pode ter mais de uma solução. Também, queremos saber se é possível dizer alguma coisa sobre a forma e a estrutura das soluções que possa ajudar a encontrar soluções de problemas particulares. As respostas a essas questões estão contidas nos teoremas a seguir...

Soluções Fundamentais

Teorema 1 da Existência e Unicidade

Considere o problema de valor inicial

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t) \qquad y(t_0) = y_0 \qquad y'(t_0) = y_0'$$

em que p, q e g são contínuas em um intervalo aberto I que contém o ponto t_0. Então, existe exatamente uma solução $y = \phi(t)$ deste problema, e a solução existe em todo o intervalo I.

Enfatizamos que o teorema diz três coisas:

1. O problema de valor inicial tem uma solução; em outras palavras, existe uma solução.

2. O problema de valor inicial tem apenas uma solução; ou seja, a solução é única.

3. A solução ϕ está definida em todo o intervalo I, em que os coeficientes são contínuos, e é, pelo menos, duas vezes diferenciável aí.

Para a maioria dos problemas acima, não é possível escrever uma expressão útil para a solução. Essa é uma grande diferença entre equações lineares de primeira e de segunda ordem.

Soluções Fundamentais

Exemplo 1:

Encontre o maior intervalo no qual a solução do problema de valor inicial abaixo existe com certeza.

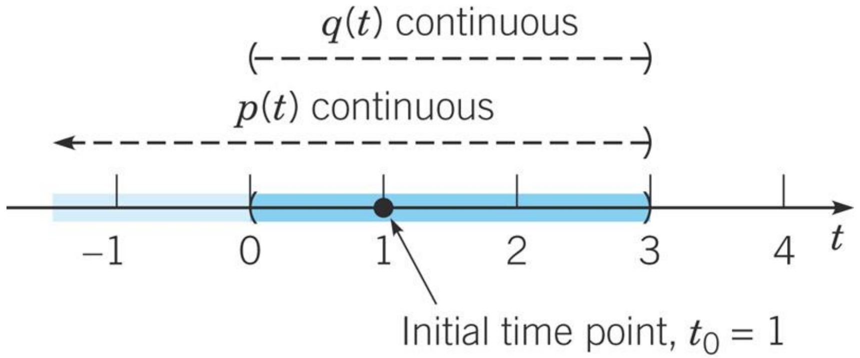
$$(t^2 - 3t)y'' + ty' - (t+3)y = 0, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = 1$$

Se a equação diferencial dada for colocada nessa forma então p(t) = 1/(t – 3), q(t) = –(t + 3)/t(t – 3) e g(t) = 0.

Os únicos pontos de descontinuidade dos coeficientes são t = 0 e t = 3.

Logo, o maior intervalo aberto contendo o ponto inicial t = 1, no qual todos os coeficientes são contínuos, é 0 < t < 3.

Portanto, esse é o maior intervalo no qual o Teorema 1 garante que a solução existe.



Soluções Fundamentais

Exemplo 2:

Encontre o maior intervalo no qual a solução do problema de valor inicial abaixo existe com certeza.

$$(t+1)y'' - (\cos t)y' + 3y = 1, \;\; y(0) = 1, \;\; y'(0) = 0$$

Rearranjando os termos....

$$y'' - \frac{\cos t}{t+1}y' + \frac{3}{t+1}y = \frac{1}{t+1}, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0$$

Logo, o maior intervalo aberto contendo o ponto inicial t = 0, no qual todos os coeficientes são contínuos, é $-1 < t < \infty$.

Portanto, esse é o maior intervalo no qual o Teorema 1 garante que a solução existe.

Soluções Fundamentais

Exemplo 3:

Encontre a única solução do problema de valor inicial em que p e q são contínuas em um intervalo aberto I contendo t_0.

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 0$$

A função y = 0 para todo t em I certamente satisfaz a equação diferencial e as condições iniciais.
Devido à parte referente à unicidade no Teorema 1, essa é a única solução do problema dado.

Vamos supor outro caso, em que y_1 e y_2 são duas soluções da equação diferencial homogênea, ou seja $L[y_i] \equiv y_i'' + p(t)y_i' + q(t)y_i = 0$, $i = 1,2$
Então, como já vimos, podemos gerar mais soluções formando as combinações lineares de y_1 e y_2. Enunciamos esse resultado como um teorema...

Soluções Fundamentais

Teorema 2. Principio da Superposição

Se y_1 e y_2 são soluções da equação diferencial...

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

então a combinação linear $c_1y_1 + c_2y_2$ também é solução, quaisquer que sejam os valores das constantes c_1 e c_2.

Para provar o Teorema 2, precisamos apenas substituir y na equação diferencial e lembrar que y_1 e y_2 são soluções...

O Teorema 2 diz que, começando com apenas duas soluções podemos construir uma família infinita de soluções.

A próxima pergunta é se todas as soluções da equação estão incluídas na combinação linear ou se podem existir soluções com formas diferentes...

Para responder utilizamos o determinante wronskiano...

Soluções Fundamentais

Determinante wronskiano

Supomos que y_1 e y_2 são soluções da equação diferencial

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

Então sabemos que $y = c_1y_1 + c_2y_2$ também é solução (Teorema 2)

As condições iniciais $y(t_0) = y_0$ $\quad y'(t_0) = y_0'$ obrigam c_1 e c_2 a satisfazerem as equações

$$c_1y_1(t_0) + c_2y_2(t_0) = y_0$$
$$c_1y_1'(t_0) + c_2y_2'(t_0) = y_0'$$

Resolvendo obtemos:

$$c_1 = \frac{y_0y_2'(t_0) - y_0'y_2(t_0)}{y_1(t_0)y_2'(t_0) - y_1'(t_0)y_2(t_0)} \qquad c_2 = \frac{-y_0y_1'(t_0) + y_0'y_1(t_0)}{y_1(t_0)y_2'(t_0) - y_1'(t_0)y_2(t_0)}$$

O que em termos de determinantes pode ser escrito como:

Soluções Fundamentais

Determinante wronskiano

$$c_1 = \frac{y_0 y_2'(t_0) - y_0' y_2(t_0)}{y_1(t_0) y_2'(t_0) - y_1'(t_0) y_2(t_0)} \qquad c_2 = \frac{-y_0 y_1'(t_0) + y_0' y_1(t_0)}{y_1(t_0) y_2'(t_0) - y_1'(t_0) y_2(t_0)}$$

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & y_2(t_0) \\ y_0' & y_2'(t_0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{vmatrix}} \qquad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_0 \\ y_1'(t_0) & y_0' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{vmatrix}}$$

$$\begin{aligned} c_1 y_1(t_0) + c_2 y_2(t_0) &= y_0 \\ c_1 y_1'(t_0) + c_2 y_2'(t_0) &= y_0' \end{aligned}$$

$$W = \begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{vmatrix} = y_1(t_0) y_2'(t_0) - y_1'(t_0) y_2(t_0)$$

Para que estas equações sejam válidas o determinante W no denominador não pode ser zero

Soluções Fundamentais

Determinante wronskiano

Por outro lado, se $W = 0$, então os denominadores que aparecem nas equações são iguais a zero.

Neste caso, o sistema de equações para obter c_1 e c_2 não têm solução, a menos que y_0 e y_0' tenham valores que também anulam os numeradores.

Isso quer dizer que: quando $W = 0$, existem muitas condições iniciais que não podem ser satisfeitas, independente das escolhas de c_1 e de c_2.

Isto leva ao Teorema 3...

Soluções Fundamentais

Teorema 3

Sejam y_1 e y_2 duas soluções da equação $L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$

e suponha que as condições iniciais... $y(t_0) = y_0 \quad y'(t_0) = y_0'$

Sempre é possível escolher constantes c_1, c_2 tais que: $y = c_1y_1 + c_2y_2$ satisfaça a equação diferencial e as condições iniciais se, **e somente se**, o wronskiano

$$W = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

não se anula em t_0

Soluções Fundamentais

Exemplo 4:

No já vimos que $y_1(t) = e^{-2t}$ e $y_2(t) = e^{-3t}$ são soluções da equação diferencial

$$y'' + 5y' + 6y = 0$$

Encontre o wronskiano de y_1 e y_2

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2 = -e^{-2t} 3e^{-3t} + 2e^{-2t} e^{-3t} = -2e^{-5t}$$

O que se pode dizer das soluções?

Como W é diferente de zero para todos os valores de t, as funções y_1 e y_2 podem ser usadas sem restrições para construir as soluções da equação diferencial para qualquer condição inicial para qualquer valor de t_0.

O próximo teorema justifica a expressão “solução geral” introduzida para a combinação linear $c_1 y_1 + c_2 y_2$.

Soluções Fundamentais

Teorema 4

Suponha que y_1 e y_2 sejam duas soluções da equação diferencial

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

Então a família de soluções $y = c_1y_1 + c_2y_2$ com coeficientes arbitrários c_1 e c_2 inclui todas as soluções da equação se, e somente se, existe um ponto t_0 em que o wronskiano de y_1 e y_2 não é nulo, ou seja $W(y_1,y_2)(t_0) \neq 0$.

A expressão $y = c_1y_1 + c_2y_2$ é chamada **solução geral** da equação diferencial e y_1 e y_2 são chamadas de **soluções fundamentais** da equação diferencial

Analisemos o sentido do teorema 4...

Soluções Fundamentais

Teorema 4

Suponha que não existe ponto t_0 em que o wronskiano não seja nulo.
Logo, $W(y_1, y_2)(t_0) = 0$, qualquer que seja o ponto t_0 selecionado.
Então (pelo Teorema 3) não existe c_1, c_2 tais que a solução $y = c_1y_1 + c_2y_2$ satisfaça a equação diferencial e as condições iniciais.
Por outro lado, o Teorema 1 garante a existência de uma solução.
Isso quer dizer que esta solução mencionada no teorema 1 não está incluída na família de soluções mencionada no teorema 3, $y = c_1y_1 + c_2y_2$.
Assim, essa combinação linear $y = c_1y_1 + c_2y_2$ não inclui todas as soluções da equação diferencial se $W(y_1, y_2) = 0$
O Teorema 4 diz que a combinação linear $c_1y_1 + c_2y_2$ contém todas as soluções da equação diferencial se, e somente se, o wronskiano de y_1 e y_2 não é nulo
Portanto, para encontrar todas as soluções precisamos, apenas, achar duas soluções da equação dada cujo wronskiano seja diferente de zero.

Vejamos exemplos...

Soluções Fundamentais

Exemplo 5:

Suponha que $y_1(t) = e^{r_1 t}$e $y_2(t) = e^{r_2 t}$ são duas soluções de uma equação da forma $L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$
Mostre que elas formam um conjunto fundamental de soluções, se $r_1 \neq r_2$.

Vamos calcular o wronskiano de y_1 e y_2:

$$W = \begin{vmatrix} e^{r_1 t} & e^{r_2 t} \\ r_1 e^{r_1 t} & r_2 e^{r_2 t} \end{vmatrix} = (r_2 - r_1)\, e^{(r_1 + r_2)t}$$

Como a função exponencial nunca se anula e como estamos supondo que $r_2 - r_1 \neq 0$, segue que W é diferente de zero para todo valor de t. Em consequência, y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções.

Soluções Fundamentais

Exemplo 6:

Mostre que $y_1(t) = \sqrt{t}$ e $y_2(t) = \frac{1}{t}$ formam um conjunto fundamental de soluções da equação $2t^2y'' + 3ty' - y = 0$ se $t>0$

Podemos verificar por substituição direta que y_1 e y_2 são soluções da equação diferencial, começando por y_1

$$2t^2\left(\frac{-t^{-3/2}}{4}\right) + 3t\left(\frac{t^{-1/2}}{2}\right) - t^{1/2} = \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 1\right)t^{1/2} = 0$$

Da mesma forma para y_2 $\quad 2t^2(2t^{-3}) + 3t(-t^{-2}) - t^{-1} = (4 - 3 - 1)t^{-1} = 0$

A seguir, vamos calcular o wronskiano W de y_1 e y_2:

Soluções Fundamentais

Exemplo 6:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t^{1/2} & t^{-1} \\ \frac{1}{2}t^{-1/2} & -t^{-2} \end{vmatrix} = -t^{-3/2} - \frac{1}{2}t^{-3/2} = -\frac{3}{2}t^{-3/2} = -\frac{3}{2\sqrt{t^3}}$$

Como $W \neq 0$ para $t > 0$, concluímos que y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções nesse domínio.

Fomos capazes de encontrar, em diversos casos, um conjunto fundamental de soluções e, portanto, a solução geral, de uma equação diferencial dada.
No entanto, muitas vezes isso é uma tarefa difícil, e uma pergunta natural é se uma equação diferencial da forma $L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$
sempre tem um conjunto fundamental de soluções.
O Teorema 5 a seguir nos dá uma resposta afirmativa a essa pergunta.

Soluções Fundamentais

Teorema 5

Considere a equação diferencial abaixo, cujos coeficientes p e q são contínuos em algum intervalo aberto I.

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

Escolha algum ponto t_0 em I. Seja y_1 a solução da equação que também satisfaz as condições iniciais

$$y(t_0) = 1 \qquad y'(t_0) = 0$$

e seja y_2 a solução da mesma equação que satisfaz as condições iniciais

$$y(t_0) = 0 \qquad y'(t_0) = 1$$

Então y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções

Analisando este teorema....

Soluções Fundamentais

Teorema 5

Observe, em primeiro lugar, que a existência das funções y_1 e y_2 é garantida pelo Teorema 1 (para cada valor inicial existe uma solução).

Para mostrar que elas formam um conjunto fundamental de soluções, só precisamos calcular seu wronskiano em t_0 e ver se é diferente de zero...

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Como seu wronskiano não se anula no ponto t_0, as funções y_1 e y_2 formam, de fato, um conjunto fundamental de soluções

Soluções Fundamentais

Exemplo 7:

Encontre o conjunto fundamental de soluções especificado pelo Teorema 5 para a equação diferencial

$$y'' - y = 0, \qquad t_0 = 0$$

Já vimos que duas soluções desta equação são **$y_1(t) = e^t$** e **$y_2(t) = e^{-t}$**.
O wronskiano dessas soluções é $W(y_1, y_2)(t) = -2 \neq 0$
Logo, elas formam um conjunto fundamental de soluções.
No entanto, **$y_1(t)$** e **$y_2(t)$** **não formam o conjunto fundamental de soluções indicado no Teorema 5**, já que não satisfazem as condições iniciais mencionadas nesse teorema no ponto $t_0 = 0$ (podem verificar).
Para encontrar o conjunto fundamental de soluções especificado no teorema, precisamos encontrar as soluções que satisfazem as condições iniciais mencionadas no teorema.
Vamos definir $y_3(t)$ como a solução da equação que satisfaz as condições iniciais

Soluções Fundamentais

Exemplo 7:

Vamos definir $y_3(t)$ como a solução da equação que satisfaz as condições iniciais

$$y(0) = 1 \qquad y'(0) = 0$$

Como já vimos a solução geral é: $y(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{-t}$

e as condições iniciais (17) são satisfeitas se $c_1 = 1/2 = c_2$. ...assim.....

$$y_3(t) = \frac{1}{2}e^{t} + \frac{1}{2}e^{-t} = \cosh(t)$$

Da mesma forma, se $y_4(t)$ satisfaz as condições iniciais invertidas...

$$y(0) = 0 \qquad y'(0) = 1$$

teremos...

$$y_4(t) = \frac{1}{2}e^{t} - \frac{1}{2}e^{-t} = \mathrm{senh}(t)$$

Soluções Fundamentais

Exemplo 7:

Se tomamos essas soluções

$$y_3(t) = \frac{1}{2}e^{t} + \frac{1}{2}e^{-t} = \cosh(t)$$

$$y_4(t) = \frac{1}{2}e^{t} - \frac{1}{2}e^{-t} = \mathrm{senh}(t)$$

e calculamos o wronskiano (de y_3 e y_4).

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{vmatrix} = \cosh^2 t - \sinh^2 t = 1 \neq 0$$

essas funções formam **<u>outro</u>** conjunto fundamental de soluções, desta vez **<u>o enunciado no Teorema 5</u>**. Portanto, a solução geral também pode ser escrita como

$$y(t) = k_1 \cosh(t) + k_2 \sinh(t)$$

Soluções Fundamentais

Exemplo 7:

Neste conjunto de soluções $y(t) = k_1 \cosh(t) + k_2 \sinh(t)$

Usamos k_1 e k_2 para as constantes arbitrárias porque não são as mesmas constantes c_1 e c_2 da equação

$$y(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{-t}$$

Um dos objetivos deste exemplo é tornar claro que **uma equação diferencial dada tem mais de um conjunto fundamental de soluções**; de fato, tem uma infinidade deles. Como regra, você deve escolher o conjunto mais conveniente.

Soluções Fundamentais

Resumo até aqui:

Para encontrar a solução geral da equação diferencial

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0, \alpha < t < \beta$$

Primeiro encontramos duas soluções y_1 e y_2

Logo verificamos se existe um ponto t_0 no intervalo $\alpha < t < \beta$ tal que $W(y_1, y_2)(t_0) \neq 0$

Se existe t_0, então y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções da equação com a solução geral:

$$y(t) = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

Se as condições iniciais foram dadas para um ponto t_0 para o qual o $W \neq 0$, então C_1 e C_2 podem ser escolhidos de forma a satisfazer a condição inicial.

Soluções Fundamentais

Teorema 6

Vamos ver agora equações diferenciais que têm soluções complexas...

O Teorema 6 a seguir é fundamental para tratar tais equações e suas soluções

Teorema 6
Considere, novamente, a equação: $L[y](\mathrm{t}) = y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = 0$

em que p(t) e q(t) são funções reais contínuas.
Se y = u(t) + i v(t) é uma solução complexa dessa equação, então suas partes real e imaginária, u(t) e v(t), também são soluções desta equação.

A demonstração é bastante simples, pois substituindo y, em L[y], por u(t) + i v(t) obtemos duas equações, uma para u(t) e outra para v(t) ambas = 0
Como, L[u](t) = 0 e L[v](t) = 0 então u(t) e v(t) também são soluções da equação e o teorema está provado

Soluções Fundamentais

Teorema 7 (Teorema de Abel)

Vamos ver um teorema que fornece uma forma explicita de calcular o wronskiano de y_1 e y_2 sem conhecer as soluções y_1 e y_2...

Teorema 7 (Teorema de Abel)

Se y_1 e y_2 são soluções da equação diferencial $L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$

em que p(t) e q(t) são contínuas em um intervalo aberto *I*, então o wronskiano $W(y_1, y_2)(t)$ é dado por

$$\boxed{W(y_1, y_2)(t) = ce^{-\int p(t)dt}}$$

em que c é uma certa constante que só depende de y_1 e y_2, mas não de t. Além disso, $W(y_1, y_2)(t)$ ou é nulo para todo t em I (se c = 0) ou nunca se anula em I (se c ≠ 0).

Soluções Fundamentais

Teorema 7 (Teorema de Abel)

Comentários:

Note que os wronskianos de dois conjuntos fundamentais de soluções quaisquer da mesma equação diferencial **só podem diferir por uma constante multiplicativa** e que o wronskiano de qualquer conjunto fundamental de soluções pode ser determinado, a menos de uma constante multiplicativa, sem resolver a equação diferencial.

Além disso, como, sob as condições do Teorema 7, o wronskiano W é sempre zero ou nunca se anula, você **pode determinar qual dos dois casos acontece de fato** calculando W para um único valor conveniente de t.

Vamos ver um exemplo....

Soluções Fundamentais

Exemplo 8:

No Exemplo 6, verificamos que $y_1(t) = \sqrt{t}$ e $y_2(t) = \frac{1}{t}$ formam um conjunto fundamental de soluções da equação $2t^2y'' + 3ty' - y = 0$ se t>0

Verifique se o teorema 7 permite encontrar o wronskiano de y_1 e y_2

De aquele exemplo sabemos que $W(y_1, y_2)(t) = -(3/2)t^{-3/2}$.
Para aplicar o Teorema 7 precisamos escrever a equação diferencial na forma-padrão, com o coeficiente de y″ igual a 1. Obtemos, então,

$$y'' + \left(\frac{3}{2t}\right)y' - \frac{1}{2t^2}y = 0$$

Logo $p(t) = \frac{3}{2t}$ portanto $W(y_1, y_2)(t) = ce^{-\int \frac{3}{2t}dt} = ce^{-\frac{3}{2}\ln t} = ct^{-\frac{3}{2}}$

Esta equação fornece o wronskiano de qualquer par de soluções. Para as soluções particulares dadas neste exemplo, precisamos escolher **c = –3/2**.

Soluções Fundamentais

Lista de exercícios disponível em:

http://www.eletrica.ufpr.br/p/professores:patricio:inicial

Disciplina TE315 (Equações Diferenciais para Engenharia Elétrica)

Gabaritos disponíveis no mesmo endereço