EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARA ENGENHARIA ELÉTRICA
TE 315

Aula 06_3

SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES HOMOGÊNEAS COM COEFICIENTES CONSTANTES

INTRODUÇÃO

Vamos concentrar a maior parte da nossa atenção em sistemas de equações lineares homogêneas com coeficientes constantes reais:

$$\begin{aligned}
x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\
x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\
&\vdots \\
x_n' &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n
\end{aligned} \qquad (1)$$

Este sistema pode ser reescrito como $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, em que:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

INTRODUÇÃO

Se n = 1, então o sistema se reduz a uma única equação de primeira ordem

$$x' = ax \qquad \Rightarrow \qquad x(t) = ce^{at}$$

Note que x = 0 é a única solução de equilíbrio quando a ≠ 0.

Se a < 0, as soluções tendem a x = 0 quando t aumenta e, neste caso, dizemos que x = 0 é uma solução de equilíbrio assintoticamente estável.

Por outro lado, se a > 0, então x = 0 é instável, já que as outras soluções (diferentes de x=0) se distanciam dela quando t aumenta.

Para sistemas de n equações, a situação é semelhante, porém mais complicada. Para encontrar as soluções de equilíbrio há que resolver **Ax** = **0**.

INTRODUÇÃO

Em geral, ao resolver **Ax** = **0** vamos supor nesta aula que det **A** ≠ 0, de modo que a única solução de equilíbrio é **x** = **0**.

Uma pergunta importante é se as outras soluções (além de **x**=**0**) se aproximam ou se afastam de **x**=**0** quando t aumenta; em outras palavras, **x** = **0** é assintoticamente estável ou instável? Existem outras possibilidades?

O caso n = 2 é particularmente importante pois permite a visualização do chamado plano de fase.

Neste plano, calculando **Ax** para um grande número de pontos e fazendo o gráfico dos vetores resultantes, obtemos um campo de direções de vetores tangentes às soluções do sistema de equações diferenciais.
Vamos ver um exemplo:

EXEMPLO 1

Encontre a solução geral do sistema:

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

A característica mais importante desse sistema é que a matriz de coeficientes é uma matriz diagonal.

Escrevendo o sistema em forma escalar, obtemos

$$x_1' = 2x_1 \qquad x_2' = -3x_2$$

Cada uma dessas equações envolve apenas uma das variáveis desconhecidas, de modo que podemos resolver as duas equações separadamente. Assim, encontramos

$$x_1 = c_1 e^{2t} \qquad x_2 = c_2 e^{-3t}$$

EXEMPLO 1

Reescrevendo a solução em forma vetorial, temos

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^{2t} \\ c_2 e^{-3t} \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-3t} \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t}$$

Agora definimos as duas soluções $\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$ por

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} \qquad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t}$$

O wronskiano dessas soluções é $W\left[\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}\right](t) = \begin{vmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{vmatrix} = e^{-t}$

que nunca se anula.

Portanto, $\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$ formam um conjunto fundamental de soluções, e a solução geral de $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ é

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \mathbf{x}^{(1)}(t) + c_2 \mathbf{x}^{(2)}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t}$$

CASO GERAL

Vamos então tentar estender o Exemplo 1 ao sistema geral abaixo procurando soluções da forma $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\xi} e^{rt}$:

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ x_n' &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{aligned} \qquad (1)$$

em que o expoente r e o vetor $\boldsymbol{\xi}$ devem ser determinados.

Substituindo a solução **x** proposta no sistema obtemos...

$$r\boldsymbol{\xi}e^{rt} = \mathbf{A}\boldsymbol{\xi}e^{rt} \Leftrightarrow r\boldsymbol{\xi} = \mathbf{A}\boldsymbol{\xi} \Leftrightarrow (\mathbf{A} - r\mathbf{I})\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$$

Assim, para resolver o sistema de equações diferenciais (1), precisamos resolver o sistema de equações algébricas acima ou seja determinar os autovalores e autovetores da matriz de coeficientes **A**.

CASO GERAL

Portanto, o vetor $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\xi} e^{rt}$ é uma solução da Eq. (1), desde que r seja um autovalor e $\boldsymbol{\xi}$ seja um autovetor associado da matriz de coeficientes **A**.

EXEMPLO 2

Considere o sistema $$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

Primeiro faça um gráfico do campo de direções e determine o comportamento qualitativo das soluções.
Depois encontre a solução geral e desenhe um retrato de fase contendo diversas trajetórias...
Para construir o campo de direções damos valores a x_1 e x_2 e obtemos o valor de x' que é desenhado num gráfico como feito a seguir....

EXEMPLO 2

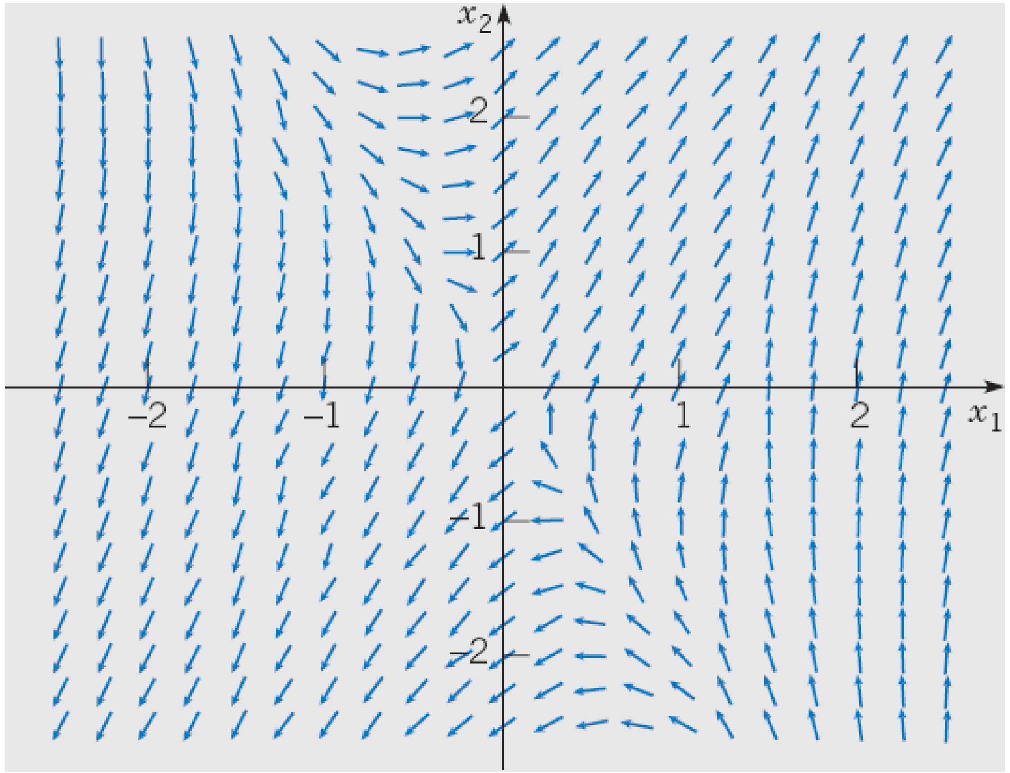
$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

A figura mostra um campo de direções para esse sistema. Seguindo as setas nessa figura, é fácil ver que qualquer solução no segundo quadrante acaba se movendo para o primeiro ou terceiro quadrante, o mesmo ocorrendo para uma solução típica no quarto quadrante.

Por outro lado, nenhuma solução se inicia no primeiro ou no terceiro quadrante.

Além disso, as soluções se afastam da vizinhança da origem e acabam tendo retas tangentes com coeficientes angulares próximos a 2.

Vamos agora obter as soluções explicitamente...



EXEMPLO 2

Para encontrar explicitamente as soluções, substituímos $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi} e^{rt}$ e rescrevemos a equação como $(\mathbf{A}-r\mathbf{I})\xi = 0$, de forma que:

$$\begin{pmatrix} -1-r & 1 \\ 4 & 1-r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esta equação tem uma solução não trivial se, e somente se, o determinante da matriz de coeficientes é zero. Logo, os valores permitidos para r são encontrados pela equação

$$\begin{vmatrix} 1-r & 1 \\ 4 & 1-r \end{vmatrix} = (1-r)^2 - 4 = r^2 - 2r - 3 = (r-3)(r+1) = 0$$

As raízes são $r_1 = 3$ e $r_2 = -1$; estes são os **autovalores da matriz** de coeficientes. Vamos analisar cada caso...

EXEMPLO 2

Se $r = r_1 = 3$ procuramos o autovetor resolvendo a equação:

$$(\mathbf{A} - r\mathbf{I})\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-3 & 1 \\ 4 & 1-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para $r = r_1 = 3$ o sistema se reduz a uma única equação....

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \to \quad \begin{matrix} \xi_1 & -1/2\xi_2 & = 0 \\ & 0 & = 0 \end{matrix}$$

Então, $\xi_2 = 2\xi_1$, e o autovetor correspondente a $r_1 = 3$ pode ser escolhido como:

$$\boldsymbol{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1/2\xi_2 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{c é arbitrario (c=2)} \to \qquad \boldsymbol{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

EXEMPLO 2

Analogamente, se $r = r_2 = -1$, encontramos ...

$$(\mathbf{A} - r\mathbf{I})\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1+1 & 1 \\ 4 & 1+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Assim obtemos...

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \to \quad \begin{matrix} \xi_1 & +1/2\xi_2 & = 0 \\ & 0 & = 0 \end{matrix}$$

Então, $\xi_2 = -2\xi_1$, e o autovetor correspondente a $r_2 = -1$ pode ser escolhido como:

$$\boldsymbol{\xi}^{(2)} = \begin{pmatrix} -1/2\xi_2 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{c é arbitrario (c}=-2) \to \qquad \boldsymbol{\xi}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

EXEMPLO 2

Desta forma encontramos que as soluções da equação diferencial são:

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} \qquad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t}$$

O wronskiano dessas soluções é:

$$W\left[\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}\right](t) = \begin{vmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ 2e^{3t} & -2e^{-t} \end{vmatrix} = -4e^{-2t} \neq 0$$

que nunca se anula.

Portanto, as soluções $\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$ formam um conjunto fundamental de soluções, e a solução geral do sistema é

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + c_2\mathbf{x}^{(2)}(t) = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t}$$

Para visualizar esta solução considerarmos seu gráfico no plano x_1x_2 para diversos valores das constantes c_1 e c_2.

EXEMPLO 2

Vamos inicialmente considerar $\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}^{(1)}(t)$ ou, em forma escalar,

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = c_1 e^{3t} \quad x_2 = 2c_1 e^{3t}$$

Eliminando t nessas duas equações obtemos....

$$x_1 = c_1 e^{3t} \qquad x_2 = 2c_1 e^{3t} \quad \Leftrightarrow \quad e^{3t} = \frac{x_1}{c_1} = \frac{x_2}{2c_1} \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = 2x_1$$

vemos que a solução $\mathbf{x}^{(1)}$ pertence à reta $x_2 = 2x_1$ que é a reta que contém a origem e tem a direção do autovetor $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$.

vejamos o gráfico...

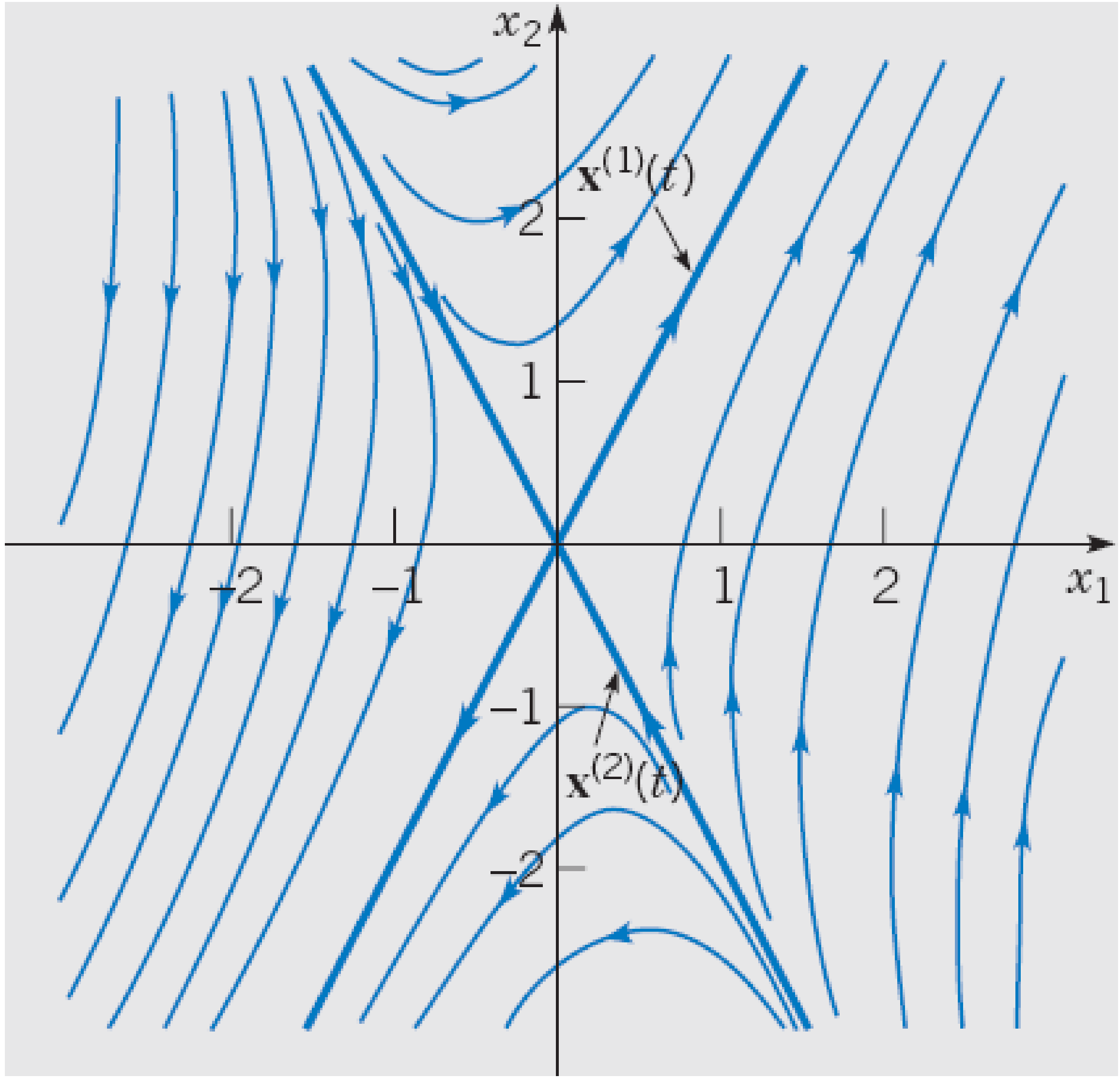
EXEMPLO 2

Vemos que a solução $\mathbf{x}^{(1)}$ pertence à reta $x_2 = 2x_1$ que é a reta que contém a origem e tem a direção do autovetor $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$.

Se olharmos a solução como a trajetória de uma partícula em movimento, então a partícula está no primeiro quadrante quando $c_1 > 0$ e no terceiro quando $c_1 < 0$.

Em qualquer desses casos, a partícula se afasta da origem quando t aumenta.

Consideremos agora $\mathbf{x} = c_2\mathbf{x}^{(2)}$



EXEMPLO 2

No caso $\mathbf{x} = c_2\mathbf{x}^{(2)}$ temos:

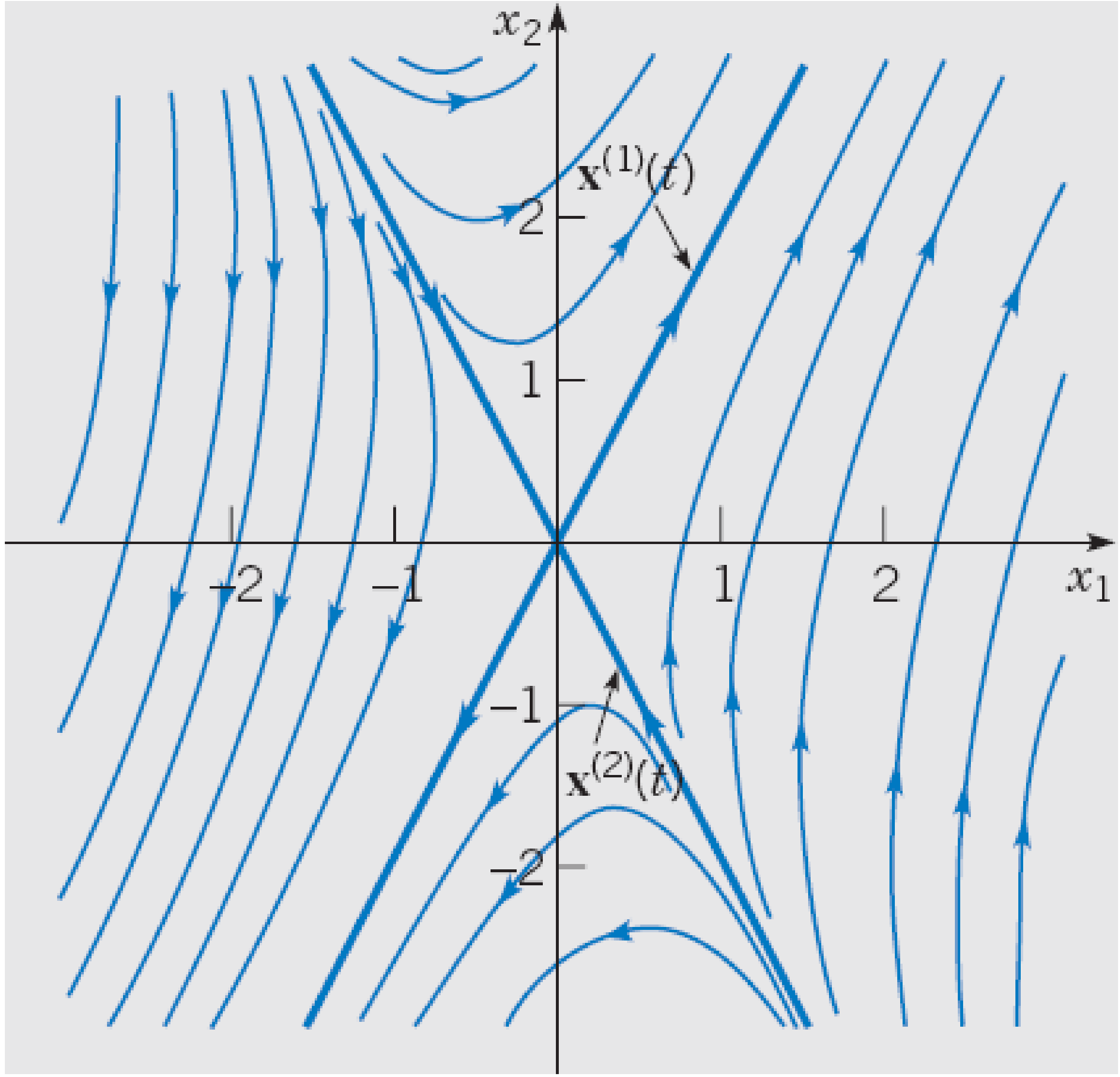
$$\mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t}$$

$$x_1 = c_2 e^{-t} \qquad x_2 = -2c_2 e^{-t}$$

$\mathbf{x}^{(2)}$ pertence à reta $x_2 = -2x_1$ que é a reta da direção do segundo autovetor $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$.

A trajetória está no quarto quadrante quando $c_2 > 0$ e no segundo quando $c_2 < 0$.

Em qualquer desses casos, a partícula se aproxima da origem quando t aumenta.



EXEMPLO 2

Como vimos, a solução geral é $\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}^{(1)} + c_2\mathbf{x}^{(2)}$:

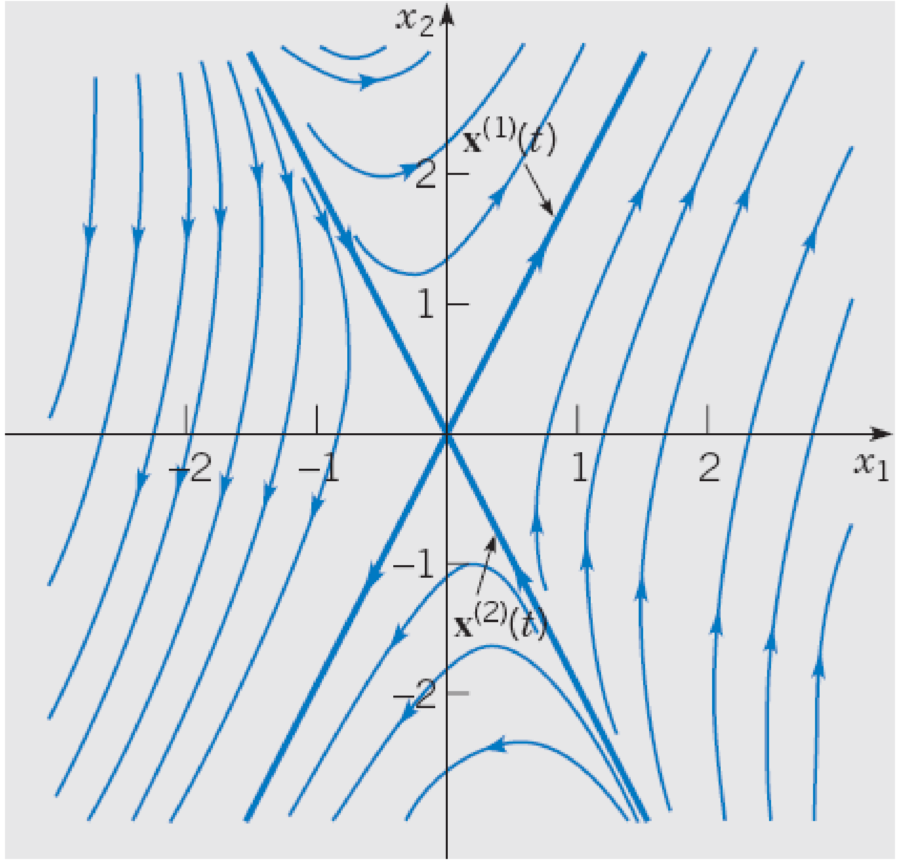
$$\mathbf{x}(t) = c_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}e^{3t} + c_2\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}e^{-t}$$

Para valores grandes de t, a parcela $c_1x^{(1)}(t)$ é dominante e a parcela $c_2x^{(2)}(t)$ torna-se desprezível.

Logo, todas as soluções para as quais $c_1 \neq 0$ são assintóticas à reta $x_2 = 2x_1$ quando $t \to \infty$.

Analogamente, todas as soluções para as quais $c_2 \neq 0$ são assintóticas à reta $x_2 = -2x_1$ quando $t \to -\infty$.

A origem é chamada de ponto de sela nesse caso. Pontos de sela são sempre instáveis porque quase todas as trajetórias se afastam dele quando t aumenta.



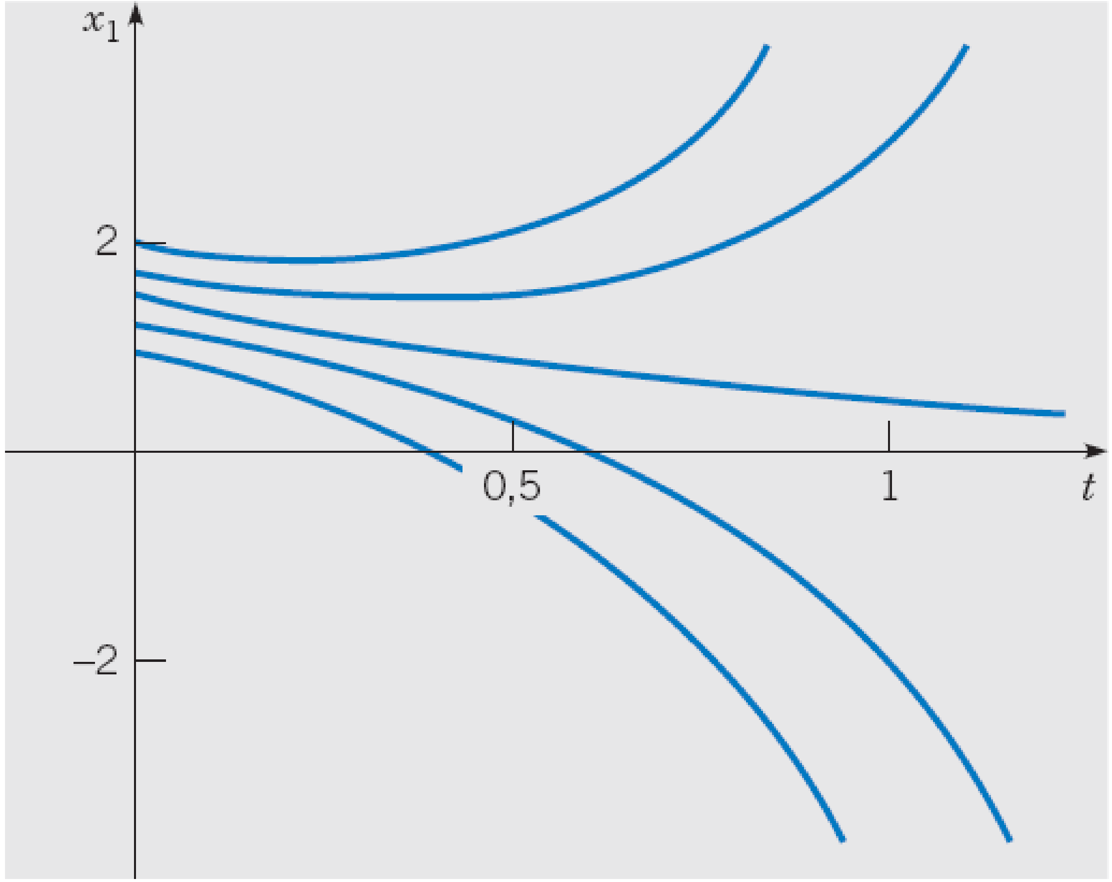
EXEMPLO 2

Também é possível desenhar o gráfico de x_1, ou de x_2, como função de t.
Alguns gráficos de x_1 em função de t são apresentados na figura abaixo (os de x_2 são parecidos).

Note que quando $c_1 = 0$, a solução fica $x_1 = c_2e^{-t}$ e temos que $x_1 \to 0$ quando $t \to \infty$.

No entanto, se $c_1 \neq 0$ então a solução $x_1 = c_1e^{3t} + c_2e^{-t}$ e ela cresce exponencialmente quando t aumenta.

Vejamos outro exemplo...

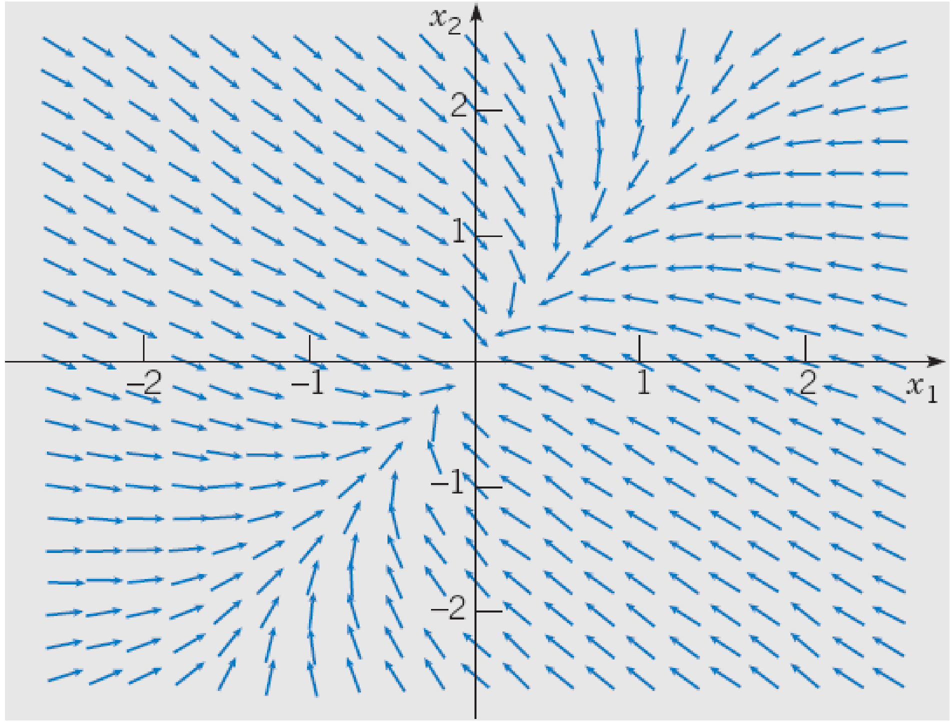


EXEMPLO 3

Considere o sistema $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

Desenhe um campo de direções para esse sistema e encontre a solução geral. Depois desenhe um retrato de fase mostrando diversas trajetórias no plano de fase.

O campo de direções para o sistema se desenha facilmente pela substituição direta de x_1 e x_2 no sistema acima (encontrando x´)...



Este campo mostra claramente que todas as soluções se aproximam da origem.

Para encontrar soluções, suponha que $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi} e^{rt}$ e proceda da forma convencional...

EXEMPLO 3

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x}$$

Substituindo **x** = **ξ**e^{rt} e reescrevendo o sistema na forma (**A**-r**I**)ξ = **0**, obtemos:

$$\begin{pmatrix} -3-r & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2-r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

em que os autovalores satisfazem

$$\begin{vmatrix} -3-r & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2-r \end{vmatrix} = (-3-r)(-2-r)-2 = r^2+5r+4 = (r+1)(r+4)$$

de modo que $r_1 = -1$ e $r_2 = -4$.

Vamos agora encontrar os autovetores correspondentes aos autovalores $r_1 = -1$ e $r_2 = -4$....

EXEMPLO 3

Para r = –1, temos que:

$$(\mathbf{A} - r\mathbf{I})\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -3+1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que se resolve assim....

$$\begin{pmatrix} -2 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2} & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \boldsymbol{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2\xi_2 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \to \boldsymbol{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

em que escolhemos a constante arbitraria como sendo igual a 1

Para determinar o outro autovetor se procede da mesma forma...

EXEMPLO 3

Para r = –4, temos que:

$$(\mathbf{A} - r\mathbf{I})\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3+4 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2+4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \boldsymbol{\xi}^{(2)} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}\xi_2 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \to \boldsymbol{\xi}^{(2)} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

em que também escolhemos a constante arbitraria como sendo igual a 1

Portanto, um conjunto fundamental de soluções para o sistema é:

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} e^{-t} \qquad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4t}$$

Agora calculamos o wronskiano para verificar se são linearmente independentes e formam um conjunto fundamental...

EXEMPLO 3

O wronskiano é: $$W\left[\mathbf{x}^{(1)},\mathbf{x}^{(2)}\right](t)=\begin{vmatrix} e^{-t} & -\sqrt{2}e^{-4t} \\ \sqrt{2}e^{-t} & e^{-4t} \end{vmatrix}=3e^{-5t}\neq 0$$

Portanto, $\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$ formam um conjunto fundamental de soluções e a solução geral de **x´=Ax** é:

$$\mathbf{x}(t)=c_1\mathbf{x}^{(1)}(t)+c_2\mathbf{x}^{(2)}(t)=c_1\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}e^{-t}+c_2\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}e^{-4t}$$

Vamos agora visualizar estas soluções, considerando separadamente cada uma delas (primeiro $\mathbf{x}^{(1)}$ e depois $\mathbf{x}^{(2)}$), desenhando seu gráfico e analisando seu comportamento...

EXEMPLO 3

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} e^{-t} \qquad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4t}$$

O retrato de fase para diversos valores de c_1 e c_2, é apresentado na figura.

A solução $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ se aproxima da origem ($t \to 0$) ao longo da reta $x_2 = \sqrt{2}\, x_1$, enquanto a solução $\mathbf{x}^{(2)}(t)$ se aproxima da origem ao longo da reta $x_1 = -\sqrt{2}\, x_2$.

As direções dessas retas são determinadas pelos autovetores $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ e $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$

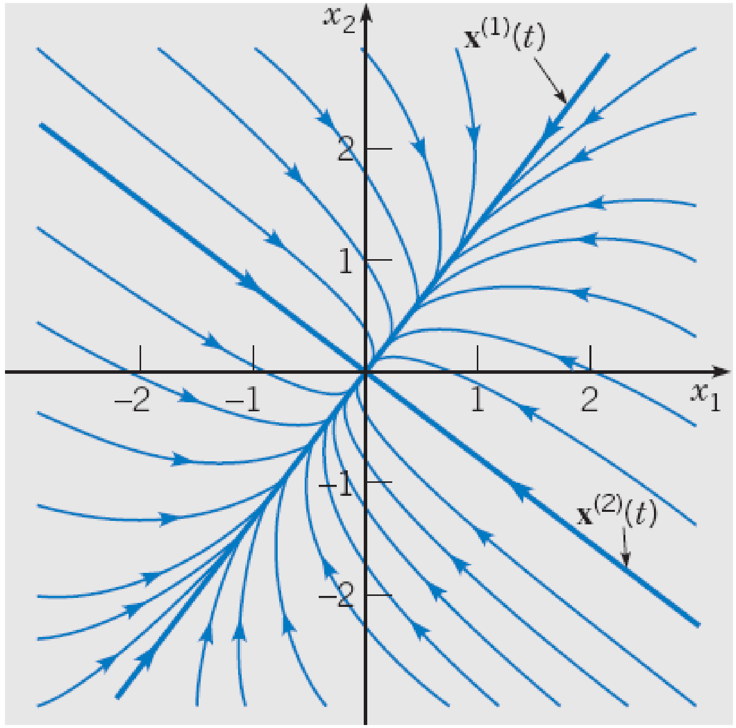
Quando $t \to \infty$, $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ é dominante e, se $c_1 \neq 0$, a solução se aproxima da origem, tangente à reta $x_2 = \sqrt{2}\, x_1$.

Este padrão é de todos os sistemas 2×2 $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ com autovalores reais, distintos e de mesmo sinal.

A origem é chamada de nó para tais sistemas.

Se os autovalores fossem positivos, em vez de negativos, as trajetórias seriam semelhantes, mas o sentido de percurso seria oposto.

Os nós serão assintoticamente estáveis, se os autovalores são negativos, e instáveis, se forem positivos.



EXEMPLO 3

Portanto, resumindo, nossa solução geral é $\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}^{(1)} + c_2\mathbf{x}^{(2)}$ em que:

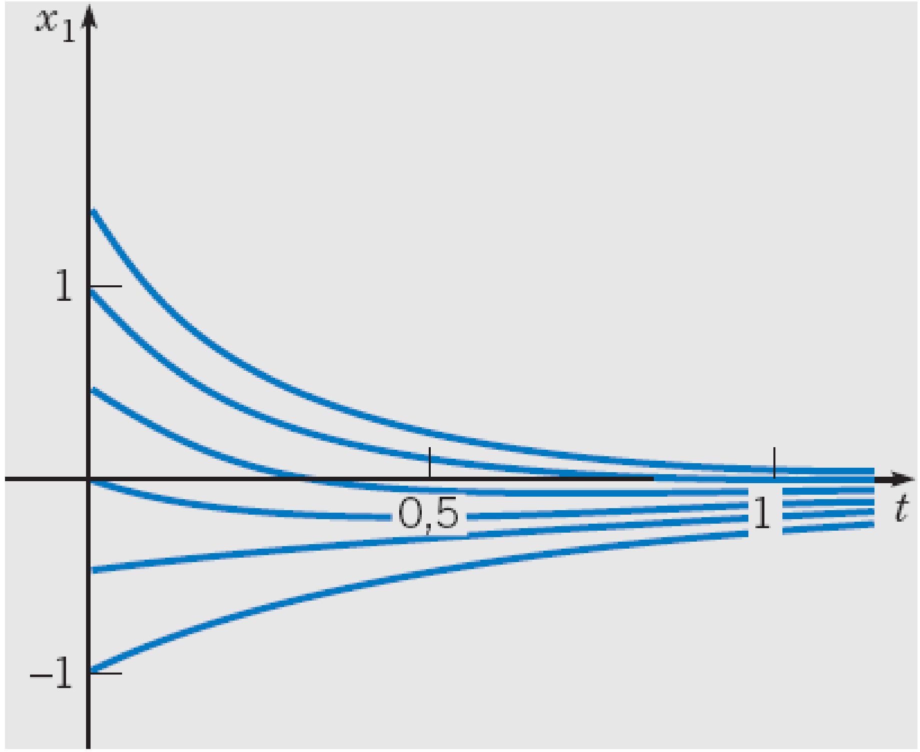
$$\mathbf{x}(t) = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} e^{-t} + c_2\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4t} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{-t} - \sqrt{2}c_2 e^{-4t} \\ \sqrt{2}c_1 e^{-t} + c_2 e^{-4t} \end{pmatrix}$$

Como no exemplo 2, aqui também é possível alternativamente desenhar o gráfico de x_1, ou de x_2, em função de t (no lugar de x_2 em função de x_1 que é o denominado diagrama de fases)

Alguns gráficos são apresentados na figura a seguir para o caso de x_1 (x_2 se obtém de forma semelhante) vejamos...

SISTEMAS LINEARES COM COEFICIENTES CONSTANTES

EXEMPLO 3



Note que cada um dos gráficos se aproxima assintoticamente do eixo dos t quando t aumenta, correspondendo a uma trajetória que se aproxima da origem na figura anterior. O comportamento de x_2 como função de t é semelhante.

SISTEMAS LINEARES COM COEFICIENTES CONSTANTES

Os Exemplos 2 e 3 ilustraram os dois casos principais para um sistema 2×2 com autovalores reais distintos.

Ou seja, quando os autovalores têm sinais opostos (Exemplo 2, a origem é um ponto de sela instável) ou têm o mesmo sinal (Exemplo 3, a origem é um nó que é estável se os autovalores são negativos e instável se são positivos).

Outra possibilidade é zero ser autovalor, mas, nesse caso, det **A** = 0, o que contradiz a hipótese feita no início desta aula (veja o slide 4).

Mas os autovalores do sistema geral (1) não se limitam ao caso particulares de serem sempre reais e distintos como analisado acima.

Como sabemos, os autovalores do sistema geral (1) $r_1, \ldots, r_n$ são raízes da equação polinomial de grau n $\det(\mathbf{A}-r\mathbf{I}) = 0$

SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS

A natureza dos autovalores e dos autovetores associados ao sistema (1) determina a natureza da solução geral desse sistema. Se **A** é uma matriz real, então precisaremos considerar as seguintes possibilidades para os autovalores de **A**:

1. Todos os autovalores são reais e distintos entre si.
2. Alguns autovalores ocorrem em pares complexos conjugados.
3. Alguns autovalores, reais ou complexos, são repetidos.

Se os n autovalores forem reais e distintos, como nos três exemplos precedentes, então existirá um autovetor real $\boldsymbol{\xi}$(i) associado a cada autovalor r_i, e o conjunto de n autovetores $\boldsymbol{\xi}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{\xi}^{(n)}$ será linearmente independente. Desta forma, as soluções correspondentes do sistema diferencial (1), ou seja, de $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ são:

SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS

No caso de autovalores reais e distintos as soluções de **x´**= **Ax** serão:

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \boldsymbol{\xi}^{(1)}e^{r_1 t}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}(t) = \boldsymbol{\xi}^{(n)}e^{r_n t}$$

Se montar o wronskiano vai perceber que: como as exponenciais nunca se anulam e como o determinante das soluções é diferente de zero (pois as soluções são linearmente independentes) então o wronskiano é sempre diferente de zero e portanto estas soluções linearmente independentes formam um conjunto fundamental de soluções

$$\mathbf{x} = c_1\boldsymbol{\xi}^{(1)}e^{r_1 t} + \cdots + c_n\boldsymbol{\xi}^{(n)}e^{r_n t}$$

Se **A** for real e simétrica (um caso particular de matrizes autoadjuntas ou hermitianas), lembre, como já vimos, que todos os autovalores $r_1, \dots, r_n$ têm que ser reais.

SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS

Além de todos os autovalores $r_1, \ldots, r_n$ serem reais, mesmo que alguns autovalores sejam repetidos, sempre vai existir um conjunto completo de n autovetores $\boldsymbol{\xi}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{\xi}^{(n)}$ que são linearmente independentes (e neste caso, de fato, ortogonais).

Portanto, as soluções do sistema diferencial (1) formam um conjunto fundamental de soluções, e a solução geral é dada, novamente, por

$$\mathbf{x} = c_1\boldsymbol{\xi}^{(1)}e^{r_1 t} + \cdots + c_n\boldsymbol{\xi}^{(n)}e^{r_n t}$$

O exemplo a seguir ilustra esse caso.

EXEMPLO 4

Encontre a solução geral de $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

Note que a matriz de coeficientes é real e simétrica.
Os autovalores e autovetores dessa matriz foram encontrados no Exemplo 5 da aula 06_2 (slide 24 dessa aula)
Esses valores eram: $r_1 = 2$, $r_2 = -1$ e $r_3 = -1$ (-1 tem multiplicidade algébrica 2) com os autovetores:

$$\boldsymbol{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{\xi}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{\xi}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Um conjunto fundamental de soluções é: $\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$ $\mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}$ $\mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}$

E a solução geral é

$$\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

EXEMPLO 4

$$\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

Este exemplo ilustra que, embora um autovalor (r = –1) tenha multiplicidade algébrica 2, pode ainda ser possível encontrar dois autovetores linearmente independentes $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$ e $\boldsymbol{\xi}^{(3)}$ e, então, construir a solução geral.

O comportamento desta solução geral depende, de modo crítico, das condições iniciais.

Se $t \to \infty$, $c_1\mathbf{x}^{(1)}$ é dominante e, se $c_1 \neq 0$, todas as soluções $\mathbf{x} \to \infty$.

Por outro lado, para determinadas condições iniciais, c_1 pode ser zero.

Nesse caso, as soluções **x** só têm termos exponenciais com potências negativas, logo as soluções $\mathbf{x} \to 0$ quando $t \to \infty$.

EXEMPLO 4

$$\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}e^{2t} + c_2\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}e^{-t} + c_3\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}e^{-t}$$

Os pontos iniciais que fazem com que c_1 seja nulo são exatamente aqueles que pertencem ao plano determinado pelos autovetores $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$ e $\boldsymbol{\xi}^{(3)}$ associados aos dois autovalores negativos.

Assim, soluções que começam nesse plano se aproximam da origem quando $t \to \infty$, enquanto todas as outras soluções tornam-se ilimitadas.

Se alguns dos autovalores ocorrerem em pares complexos conjugados, então ainda existirão n soluções linearmente independentes desde que todos os autovalores sejam distintos.

Dificuldades mais sérias podem ocorrer se um autovalor for repetido...

EXEMPLO 4

$$\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

Se um autovalor for repetido, o número de autovetores linearmente independentes pode ser menor do que a multiplicidade algébrica do autovalor.

Se isto ocorrer, o número de soluções linearmente independentes da forma $\boldsymbol{\xi}e^{rt}$ será menor do que n.

Para construir um conjunto fundamental de soluções, será necessário, então, procurar soluções adicionais de outra forma.

A situação é parecida com o caso de uma equação linear de ordem n com coeficientes constantes; uma raiz repetida da equação diferencial fornecia soluções da forma e^{rt}, te^{rt}, t^2e^{rt}, etc.

EXEMPLO 4

$$\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

Finalmente, se a matriz **A** for complexa, então os autovalores complexos não precisam aparecer em pares conjugados, e os autovetores são, em geral, complexos, mesmo que o autovalor associado seja real.

As soluções da equação diferencial (1) ainda serão da forma :

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \boldsymbol{\xi}^{(1)} e^{r_1 t}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}(t) = \boldsymbol{\xi}^{(n)} e^{r_n t}$$

desde que existam n autovetores linearmente independentes, mas, em geral, todas as soluções serão complexas.

Lista de exercícios disponível em:

http://www.eletrica.ufpr.br/p/professores:patricio:inicial

Disciplina TE315 (Equações Diferenciais para Engenharia Elétrica)

Gabaritos disponíveis no mesmo endereço